

ESPECIALIZACIÓN EN  
**SDE**  
SISTEMAS \* DISTRIBUCIÓN \* ENERGÍA ELÉCTRICA

ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA,  
ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES



## **FUNCIONES DE LA OPERACIÓN : Operación de los sistemas de distribución de energía eléctrica**

**Profesor: JAIRO BLANCO SOLANO**  
**Candidato a Doctor - Área Ing. Eléctrica**  
**Grupo GISEL**

Universidad  
Industrial de  
Santander



Universidad  
Industrial de  
Santander



CONSTRUIMOS FUTURO

# CONTENIDO

- 1. Introducción a la operación de los SDE*
- 2. Métodos de análisis aproximados de los SDE*
- 3. Modelos aproximados y exactos de carga*
- 4. Modelamiento de líneas a través de las ecuaciones de Carson*
- 5. Modelamiento matricial de los elementos del SDE*
- 6. Flujo de carga trifásico en sistemas eléctricos desbalanceados*

## ***Introducción a los sistemas de distribución***

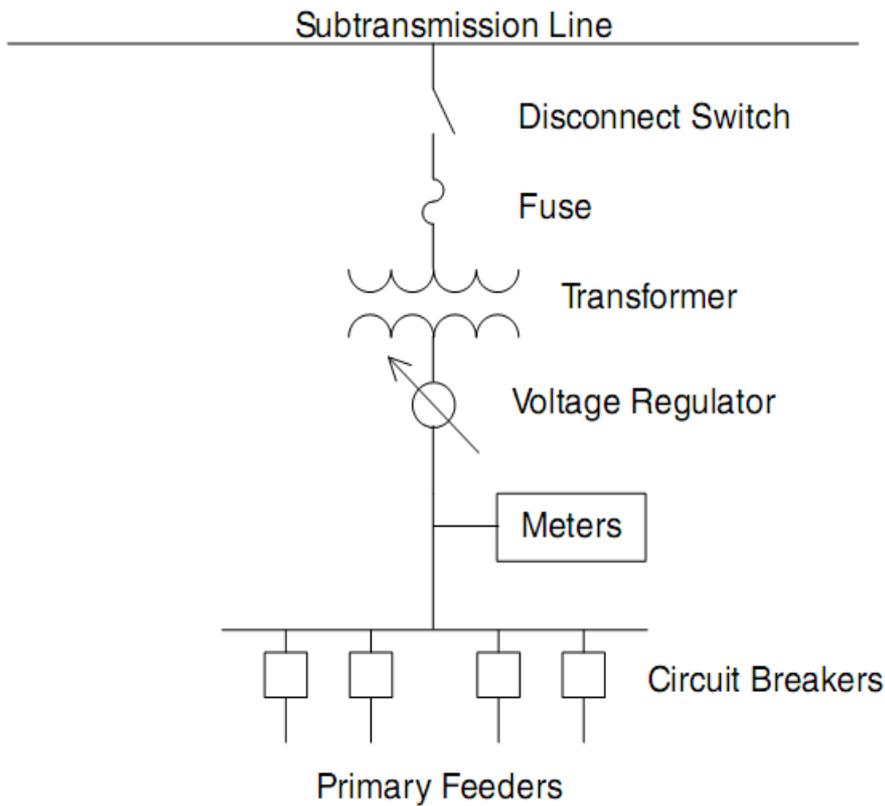
Alrededor de la necesidad de operar los sistemas de distribución a su máxima capacidad, surgen interrogantes como:

- **Cuál es la capacidad máxima?**
- **Cómo determinar esta capacidad?**
- **Cuáles son los límites de operación que deben ser satisfechos?**
- **Qué se puede hacer para operar el sistema de distribución dentro de los límites de operación?**
- **Qué hacer para que el sistema de distribución opere más eficientemente?**

Todas las preguntas pueden tener una respuesta solamente si el sistema de distribución puede ser modelado con una alta precisión.

# Los sistemas de distribución

## Subestación de distribución



**Conmutación en alta y baja tensión**

**Transformación de tensiones**

**Regulación de tensión**

**Dispositivos de protección**

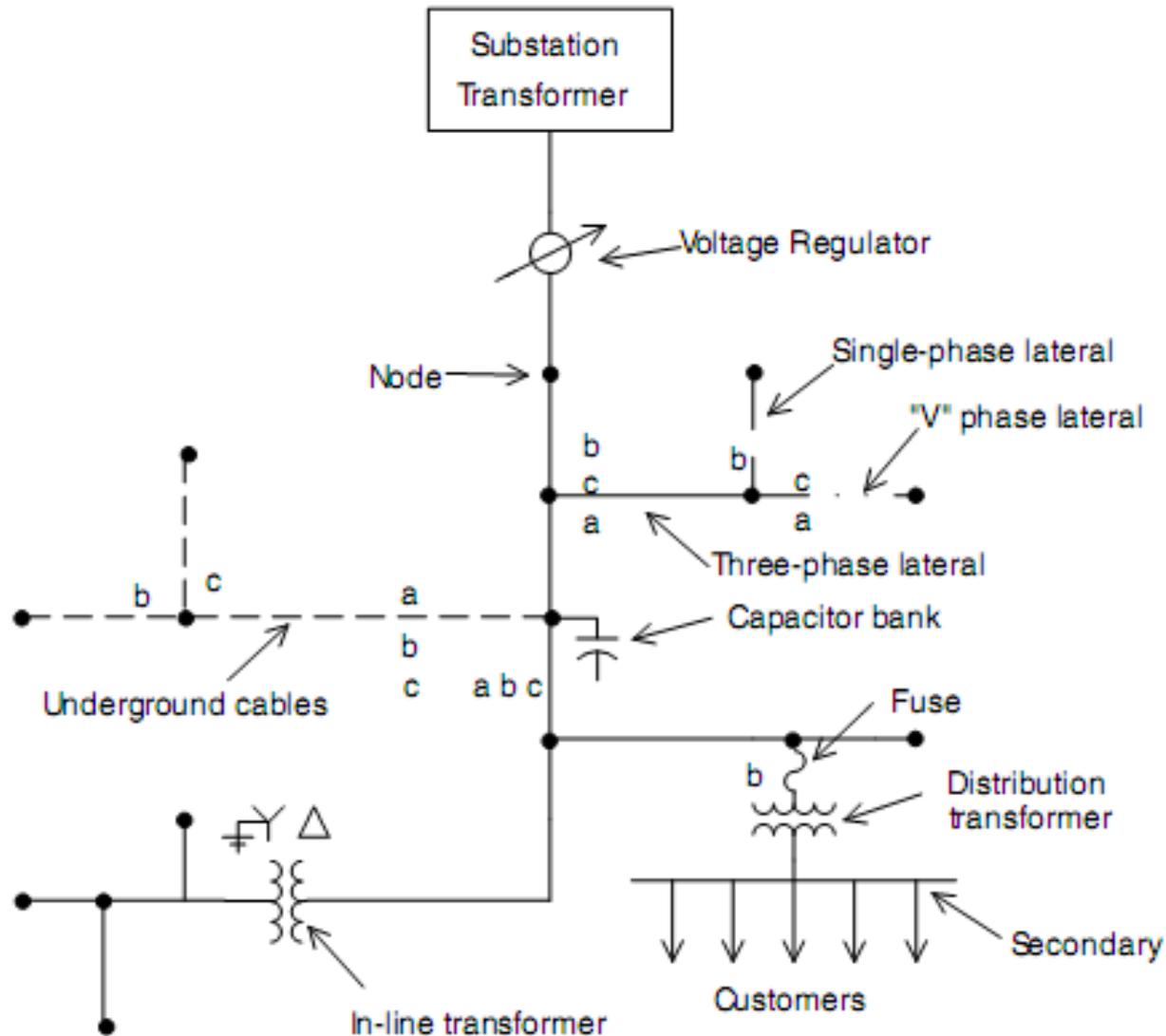
**Monitorización**

# *Alimentadores radiales*

Compuestos por:

1. Alimentador trifásico principal
2. Ramales trifásicos, bifásicos o monofásicos
3. Reguladores de tensión e interruptores de reconfiguración
4. Transformadores en las líneas
5. Bancos de condensadores
6. Transformadores de distribución
7. Cargas monofásicas, bifásicas o trifásicas.
8. Desbalances notables debido al gran número de cargas monofásicas distintas y a la asimetría de los espaciamientos de los conductores de los segmentos de línea aéreos y subterráneos.

# Ejemplo de un alimentador radial



# ***Características eléctricas de un alimentador***

Para determinar sus características eléctricas en miras de un modelamiento, se requiere la siguiente información:

**Espaciamientos de las disposiciones de las líneas aéreas y subterráneas**

**Tablas de conductores**

- a. Radios medios geométricos
- b. Diámetros
- c. Resistencias

**Reguladores de tensión**

- a. Relación de los PT
- b. Relación de los CT
- c. Ajustes de compensación

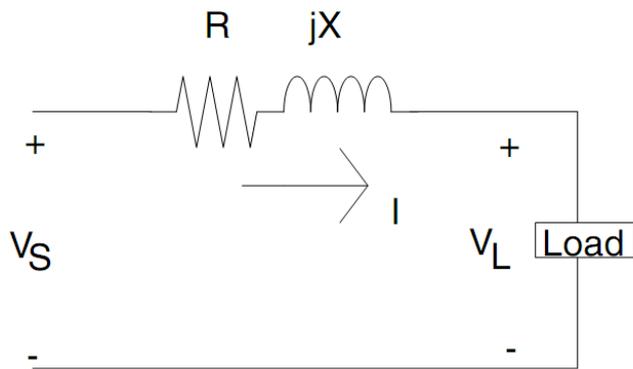
**Transformadores**

- a. KVA nominales
- b. Tensiones nominales
- c. Impedancia (R y X)
- d. Pérdidas

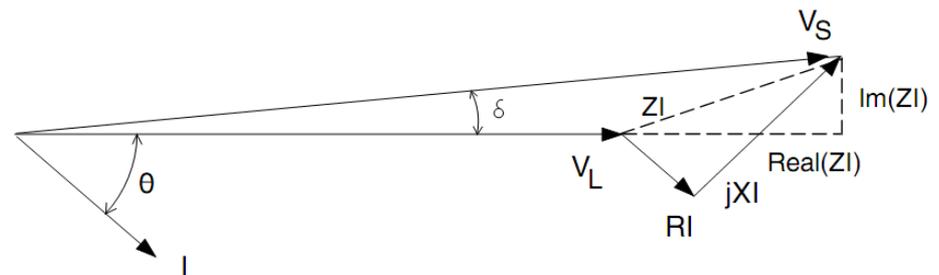
# Métodos Aproximados de Análisis

Todos los métodos aproximados para el modelamiento y análisis de sistemas trifásicos con un modelado por fase asumen la condición que los sistemas son balanceados. Son apropiados para una respuesta rápida y aproximada.

## Método de “Caída de Tensión”



$$V_S = V_L + (R + jX) \cdot I = V_L + R \cdot I + jX \cdot I$$

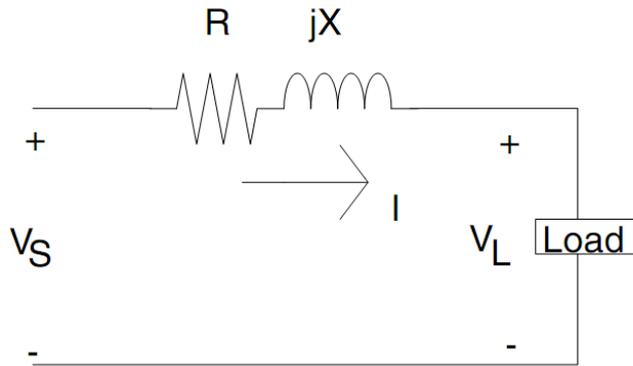


$$V_{\text{drop}} = |V_S| - |V_L|$$

$$V_{\text{drop}} \cong \text{Re}(Z \cdot I)$$

# Ejemplo 1

La impedancia de un segmento de línea:



$$Z_{12} = 0.2841 + j0.5682 \Omega$$

La corriente que fluye hacia la carga:

$$I_{12} = 43.0093 / \underline{-25.8419} \text{ A}$$

Tensión en el lado emisor :  $2400 / \underline{0.0} \text{ V}$

$$\begin{aligned} V_L &= 2400 / \underline{0.0} - (0.2841 + j0.5682) \cdot 43.0093 / \underline{-25.8419} \\ &= 2378.4098 / \underline{-0.4015} \text{ V} \end{aligned}$$

$$V_{\text{drop}} = 2400.0000 - 2378.4098 = 21.5902 \text{ V}$$

$$V_{\text{drop}} = \text{Re}[(0.2841 + j0.5682) \cdot 43.0093 / \underline{-25.8419}] = 21.6486 \text{ V}$$

$$\text{Error} = \frac{21.5902 - 21.6486}{21.5902} \cdot 100 = -0.27\%$$

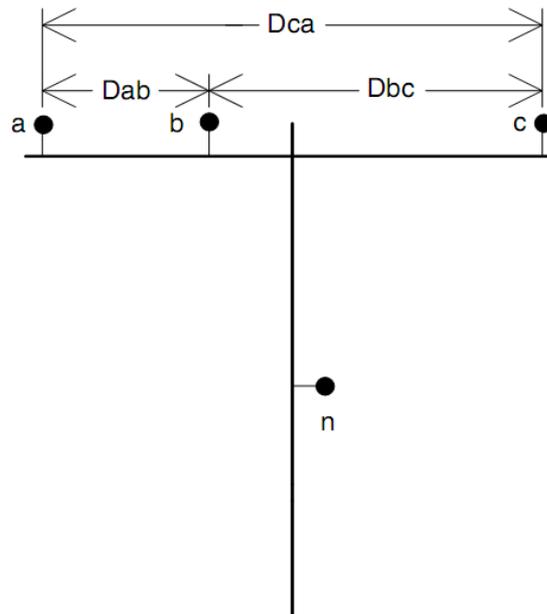
# Impedancia aproximada de las líneas

Suponiendo la transposición de las líneas:

$$Z_{\text{positive}} = r + j0.12134 \cdot \ln\left(\frac{D_{eq}}{\text{GMR}}\right) \Omega/\text{mile}$$

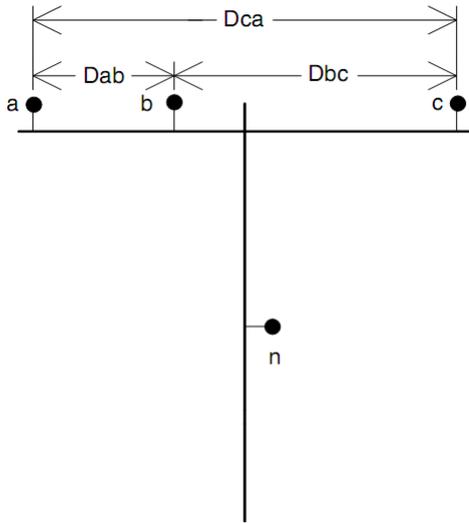
$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab} \cdot D_{bc} \cdot D_{ca}} \text{ (ft.)}$$

GMR= radio medio geométrico del conductor (ft.)



## Ejemplo 2

Segmento de línea trifásico , conductor: 336,400 26/7 ACSR



$$D_{ab} = 2.5 \text{ ft.}, \quad D_{bc} = 4.5 \text{ ft.}, \quad D_{ca} = 7.0 \text{ ft.}$$

$$r = 0.306 \Omega/\text{mile}$$

$$\text{GMR} = 0.0244 \text{ ft}$$

Determinar la impedancia de secuencia positiva de la línea en Ohms / milla.

$$z_{\text{positive}} = 0.306 + j0.12134 \cdot \ln\left(\frac{4.2863}{0.0244}\right) = 0.306 + j0.6272 \Omega/\text{mile}$$

# Factores “K”

Son una aproximación para el cálculo de caídas de tensión a lo largo de un segmento de línea.

Existen dos tipos de factores “K”: uno para la caída de tensión ( $K_{\text{drop}}$ ) y otro para el cálculo de sobretensiones ( $K_{\text{rise}}$ ).

$$K_{\text{drop}} = \frac{\text{Percent voltage drop}}{\text{kVA} \cdot \text{mile}}$$

El factor  $K_{\text{drop}}$  se calcula a partir del porcentaje de la caída de tensión en una línea de una milla de longitud, respecto a la tensión nominal, que suministra una potencia de 1 kVA a una carga trifásica.

## Ejemplo 3

Una línea de una milla de longitud con tensión de operación de 12,47 kV alimenta una carga con factor de potencia de 0,9 en atraso. La impedancia de la línea es:

$$Z = 0.306 + j0.6272 \ \Omega$$

Determinar el *Kdrop*:

$$I = \frac{1 \text{ kVA}}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} / \underline{-\cos^{-1}(PF)} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 12.47} / \underline{-\cos^{-1}(0.9)} = 0.046299 / \underline{-25.84} \text{ A}$$

$$V_{\text{drop}} = \text{Re}[Z \cdot I] = \text{Re}[(0.306 + j0.6272) \cdot 0.046299 / \underline{-25.84}] = 0.025408 \text{ V}$$

$$K_{\text{drop}} = \frac{0.025408}{7199.6} \cdot 100 = 0.00035291\% \text{ drop/kVA-mile}$$

## Ejemplo 3

Si se cuenta con una carga de 7500 kVA alimentada por una línea de 1,5 millas, cuál sería el porcentaje de la caída de tensión?

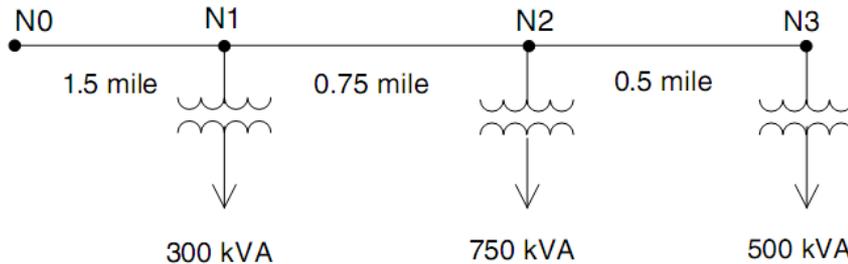
$$V_{\text{drop}} = K_{\text{drop}} \cdot \text{kVA} \cdot \text{mile} = 0.00035291 \cdot 7500 \cdot 1.5 = 3.9702\%$$

Para esta línea, el operador de red establece un límite máximo en la caída de tensión del 3%. Cuál debe ser la carga que puede ser suministrada?

$$\text{kVA}_{\text{load}} = \frac{3.0\%}{0.00035291 \cdot 1.5} = 5667.2 \text{ kVA}$$

## Ejemplo 4

Para el siguiente alimentador trifásico se ha determinado el factor  $K_{drop}$ .



$$K_{drop} = 0.00035291$$

Determinar el factor de caída desde la subestación hasta el nodo más lejano.

$$kVA_{01} = 300 + 750 + 500 = 1550 \text{ kVA}$$

$$Vdrop_{01} = 0.00035291 \cdot 1550 \cdot 1.5 = 0.8205\%$$

$$kVA_{12} = 750 + 500 = 1250 \text{ kVA}$$

$$Vdrop_{12} = 0.00035291 \cdot 1250 \cdot 0.75 = 0.3308\%$$

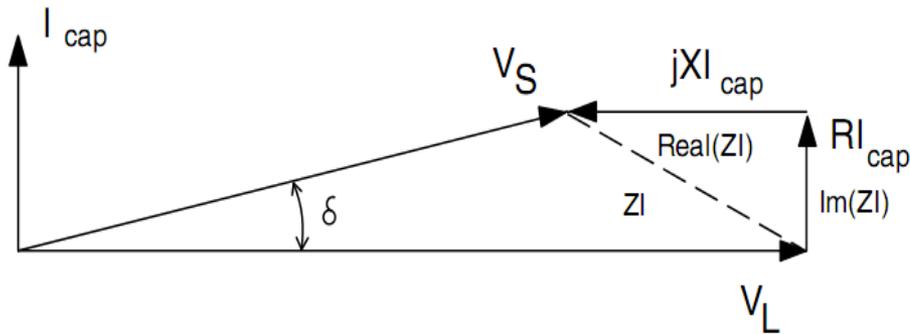
$$kVA_{23} = 500$$

$$Vdrop_{23} = 0.00035291 \cdot 500 \cdot 0.5 = 0.0882\%$$

$$Vdrop_{total} = 1.2396\%$$

# Factor $K_{rise}$

Es un factor similar al  $K_{drop}$  con excepción que en este caso la carga es un banco de condensadores.



$$V_{rise} = |\text{Re}(ZI_{cap})| = X \cdot |I_{cap}|$$

$$K_{rise} = \frac{\text{Percent voltage rise}}{\text{kvar mile.}}$$

## Ejemplo 5

Calcular el factor  $K_{\text{rise}}$  para una línea de 1 milla de longitud, operando a 12.47 kV y que tiene una impedancia de:

$$Z = 0.306 + j0.6272 \Omega$$

$$I_{\text{cap}} = \frac{1 \text{ kvar}}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} \angle 90 = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 12.47} \angle 90 = 0.046299 \angle 90 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{rise}} &= |\text{Re}[Z \cdot I_{\text{cap}}]| = |\text{Re}[(0.306 + j0.6272) \cdot 0.046299 \angle 90]| \\ &= 0.029037 \text{ V} \end{aligned}$$

$$K_{\text{rise}} = \frac{0.029037}{7199.6} \cdot 100 = 0.00040331\% \text{ rise/kvar mile}$$

## Ejemplo 5

Determinar la capacidad de un banco trifásico de condensadores para limitar la caída de tensión al 2,5% en el ejemplo 3.

$$V_{\text{drop}} = 3.9702\%$$

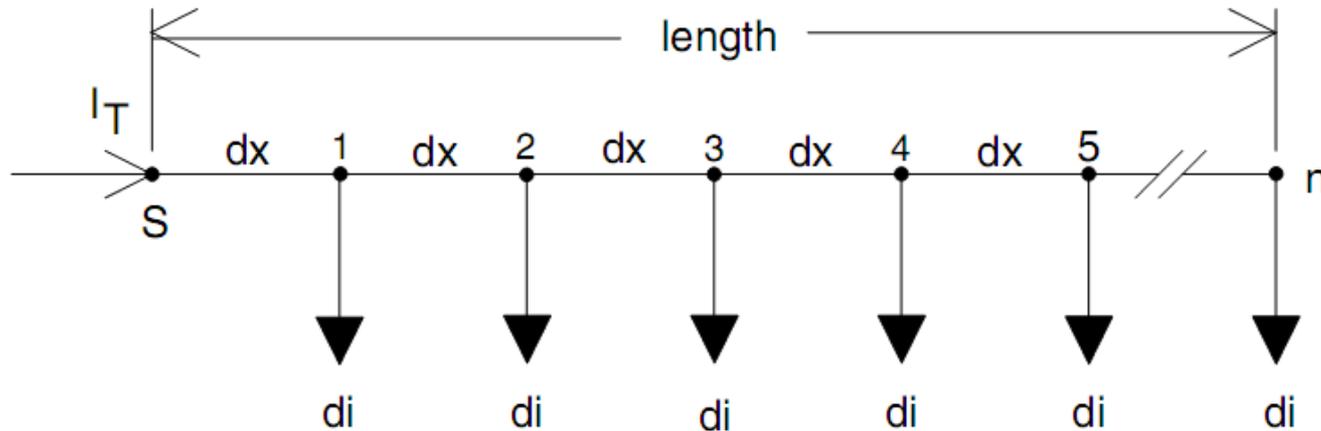
Para limitar la caída de tensión, se requiere un incremento de tensión debido a la instalación de un banco de condensadores.

$$V_{\text{rise}} = 3.9702 - 2.5 = 1.4702\%$$

$$kvar = \frac{V_{\text{rise}}}{K_{\text{rise}} \cdot \text{mile}} = \frac{1.4702}{0.00040331 \cdot 1.5} = 2430.18 \text{ kvar}$$

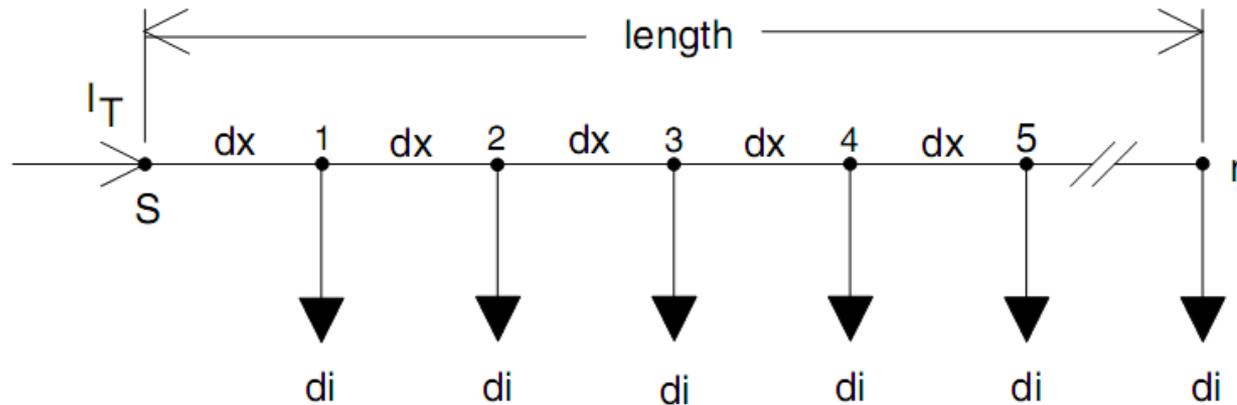
# Modelamiento de Cargas Uniformemente Distribuidas

Muchas veces se asume la distribución uniforme de cargas a lo largo de una línea o alimentador (trifásico, bifásico o monofásico).



Cuando las cargas son uniformemente distribuidas, no se requiere un modelo para cada carga cuando se desea estimar la caída de tensión desde la fuente hasta el último nodo de carga.

## Caída de Tensión



$$di = \frac{I_T}{n}$$

$l$  = longitud del alimentador

$z = r + jx$  = impedancia de la línea en Ohms / milla

$dx$  = longitud de cada sección de línea

$di$  = corriente de carga en cada nodo

$n$  = número de nodos y número de secciones de línea

$I_T$  = corriente total que entra por el alimentador

## Expresiones asociadas:

$$V_{drop_1} = \operatorname{Re}\{z \cdot dx \cdot (n \cdot di)\}$$

$$V_{drop_2} = \operatorname{Re}\{z \cdot dx \cdot [(n-1) \cdot di]\}$$

$$V_{drop_{total}} = V_{drop_1} + V_{drop_2} + \dots + V_{drop_n}$$

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re}\{z \cdot dx \cdot di \cdot [n + (n-1) + (n-2) + \dots + (1)]\}$$

Equivalencia de la serie:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re}\left\{z \cdot dx \cdot di \cdot \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]\right\}$$

$$dx = \frac{l}{n}$$

$$di = \frac{I_T}{n}$$

**Sustituyendo:**

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re} \left\{ z \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{I_T}{n} \cdot \left[ \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right] \right\}$$

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re} \left\{ z \cdot l \cdot I_T \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{n + 1}{n} \right) \right\}$$

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right\}$$

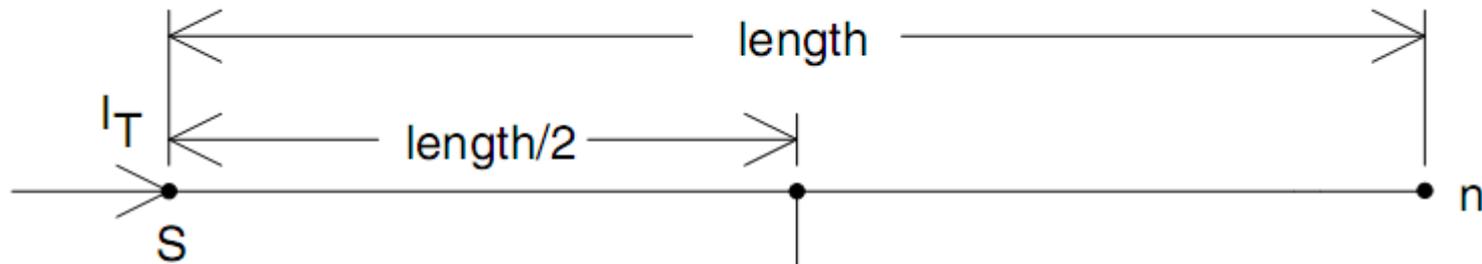
$$Z = z \cdot l$$

**Con  $n$  que tiende hacia infinito:**  $V_{drop_{total}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T \right\}$

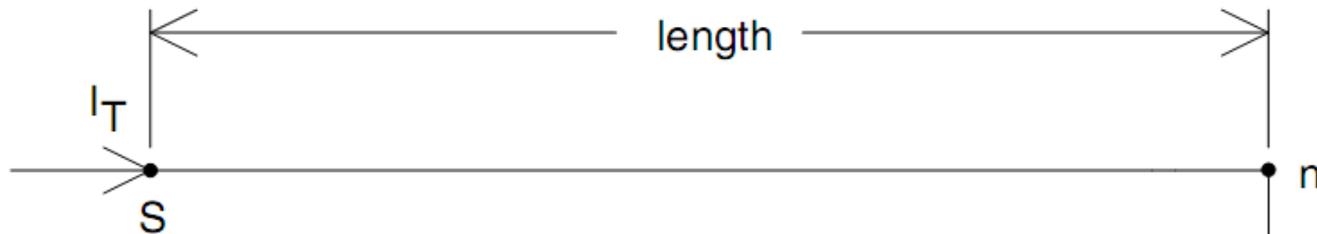
# Modelos derivados

A partir de:

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T \right\}$$



Carga concentrada en el punto medio

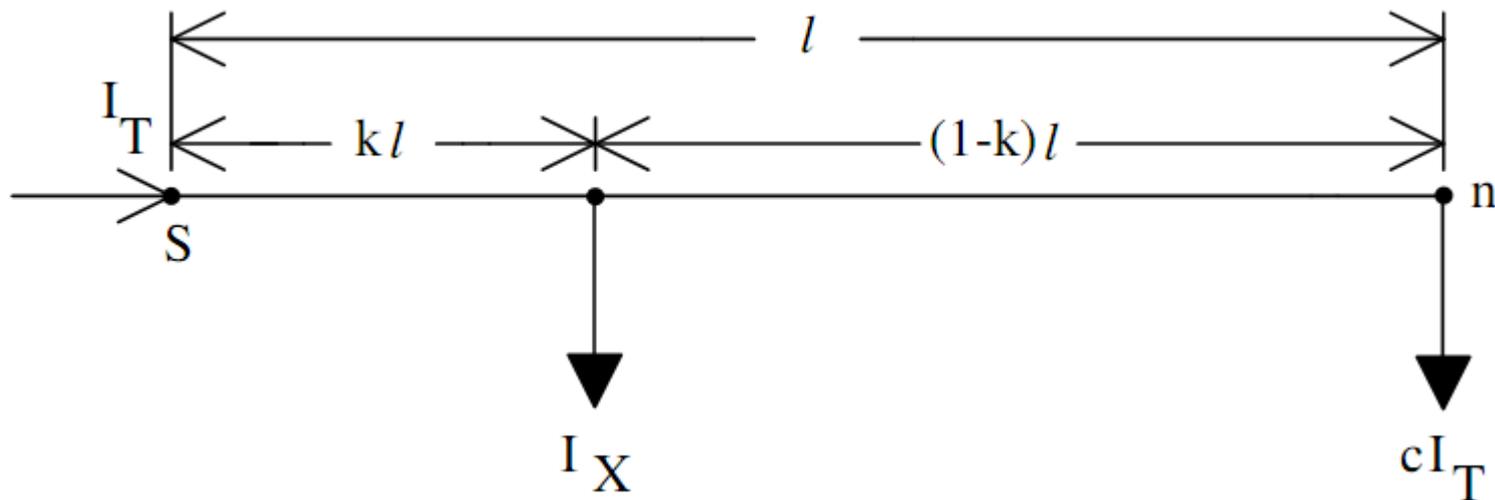


La mitad de la carga concentrada en el punto final



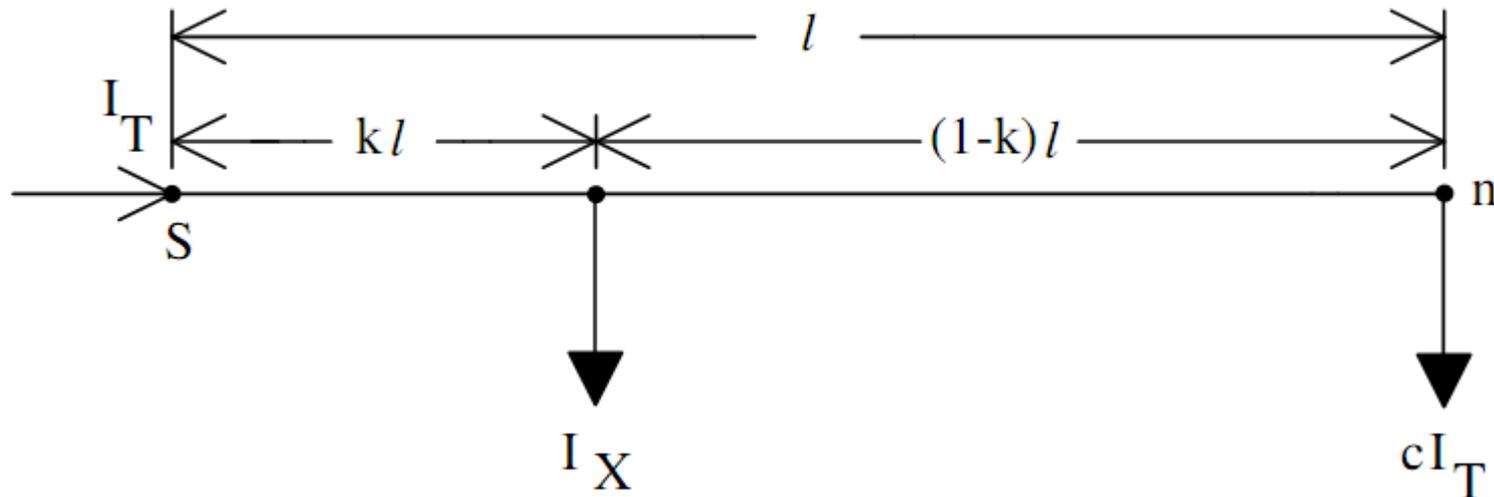
# Modelo Exacto de carga concentrada

Se puede demostrar que no es posible utilizar los modelos de caída de tensión para el cálculo de pérdidas de potencia. Esto conlleva a la búsqueda de un modelo que pueda ser utilizado conjuntamente en los dos análisis.



El modelo cuenta con una porción de corriente ( $I_X$ ) de la corriente total ( $I_T$ ), ubicada a una distancia  $kl$  de la fuente, y una corriente remanente  $cI_T$  modelada en el final de la línea. Los valores a encontrar son  $k$  y  $c$ .

# Modelo Exacto de carga concentrada



$$V_{drop_{total}} = \text{Re}[k \cdot Z \cdot I_T + (1 - k) \cdot Z \cdot c \cdot I_T]$$

$Z$  = impedancia total de la línea en Ohms

$k$  = factor de longitud de la línea donde se modela la primera parte de la corriente de carga

$c$  = factor de la corriente total que se ubica al final de la línea

# Modelo Exacto de carga concentrada

Se demostró:  $V_{drop_{total}} = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T\right]$

$$V_{drop_{total}} = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T\right] = \operatorname{Re}[k \cdot Z \cdot I_T + (1 - k) \cdot Z \cdot c \cdot I_T]$$

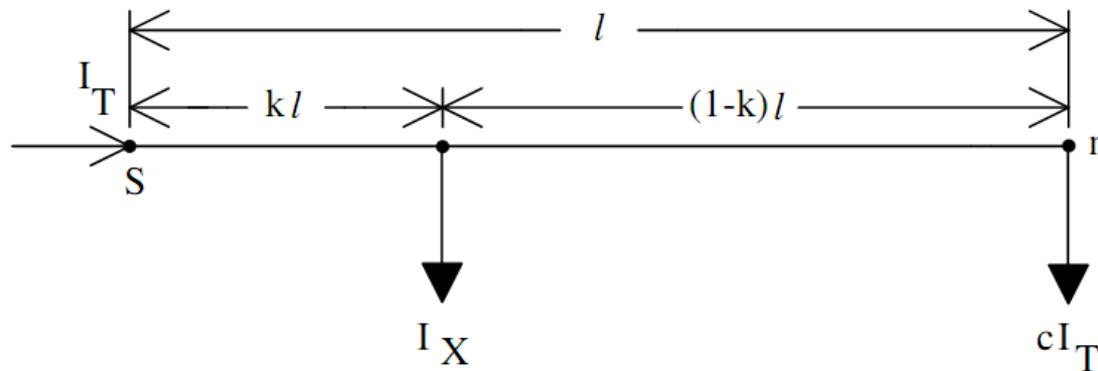
$$\left[\frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T\right] = [k \cdot Z \cdot I_T + (1 - k) \cdot Z \cdot c \cdot I_T]$$

$$\left[\frac{1}{2}\right] = [k + (1 - k) \cdot c]$$

$$k = \frac{0.5 - c}{1 - c}$$

# Modelo Exacto de carga concentrada

Para las pérdidas:



$$P_{\text{loss}_{\text{total}}} = 3 \cdot [k \cdot R \cdot |I_T|^2 + (1 - k) \cdot R \cdot (c \cdot |I_T|)^2]$$

$$P_{\text{loss}_{\text{total}}} = 3 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot R \cdot |I_T|^2 \right]$$

$$\left[ \frac{1}{3} \cdot R \cdot |I_T|^2 \right] = [k \cdot R \cdot |I_T|^2 + (1 - k) \cdot R \cdot (c \cdot |I_T|)^2]$$

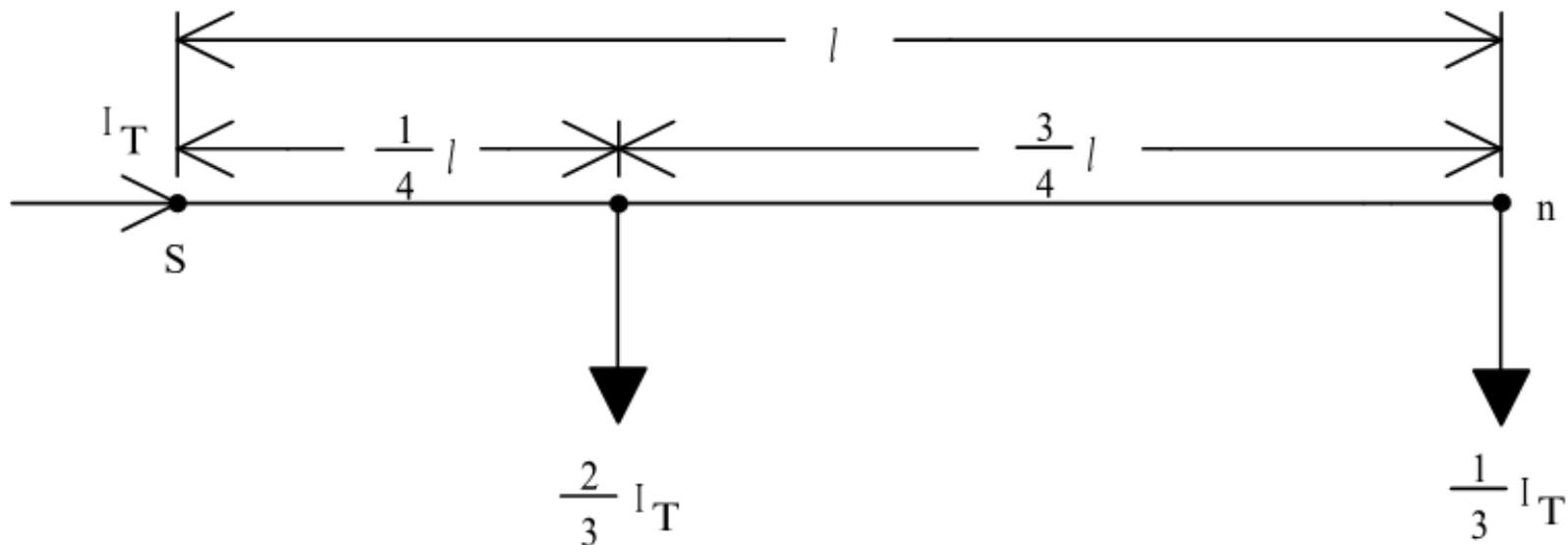
$$\left[ \frac{1}{3} \right] = [k + (1 - k) \cdot (c)^2] \quad \left[ \frac{1}{3} \right] = [k + c^2 - k \cdot c^2] = [k \cdot (1 - c^2) + c^2]$$

# Modelo Exacto de carga concentrada

Resolviendo: 
$$\left[ \frac{1}{3} \right] = \left[ \frac{0.5 - c}{1 - c} \cdot (1 - c^2) + c^2 \right]$$

$$c = \frac{1}{3} \qquad k = \frac{1}{4}$$

Para el modelo exacto:



# ***Cargas concentradas con configuraciones geométricas***

Muchas veces las áreas de suministro de la energía eléctrica pueden ser representadas por configuraciones geométricas tales como rectángulos, triángulos y trapezoides. La información relacionada es:

**D** = densidad de carga en  $\frac{kVA}{milla^2}$

**PF** = factor de potencia (asumido en atraso)

**z** = impedancia de línea en Ohms / milla

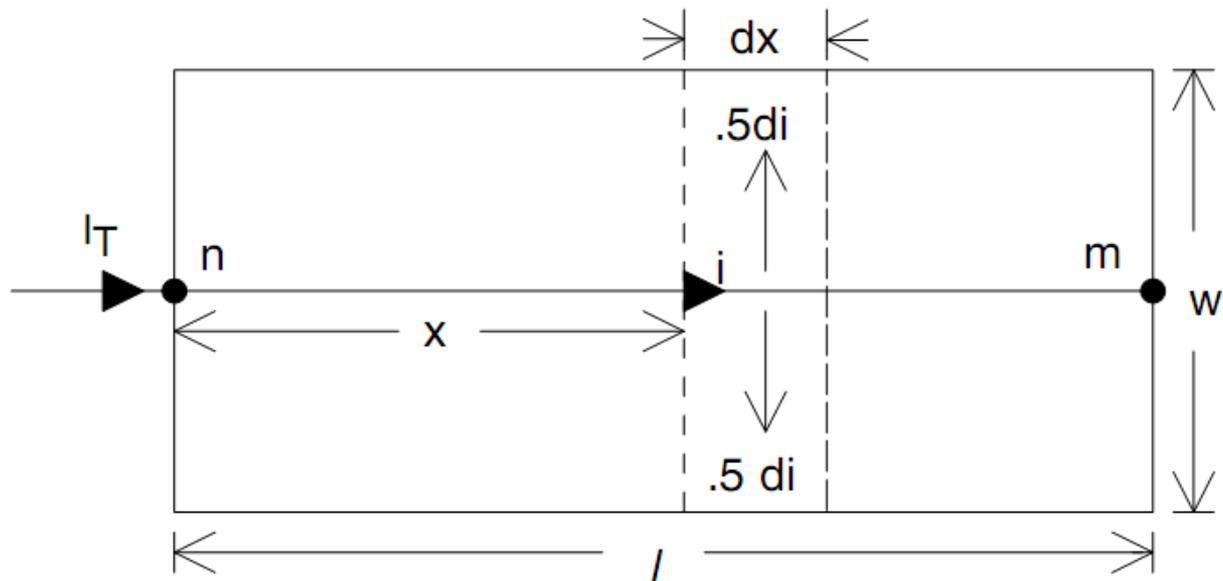
**w** = ancho del área

**$kV_{LL}$**  = tensión nominal de línea en kV

Las cargas se modelan usualmente como fuentes de corriente constante.

# Área Rectangular

Un área rectangular de longitud  $l$  y ancho  $w$ , es alimentada por un alimentador principal. El área del alimentador es asumida con una densidad de carga constante y ramales trifásicos uniformemente conectados al alimentador principal.



$$I_T = \frac{D \cdot l \cdot w}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} / \underline{-\cos^{-1}(PF)}$$

$$di = \frac{I_T}{l} \text{ A/mile}$$

# Área Rectangular

Corriente en el segmento:

$$i = I_T - x \cdot di = I_T - x \cdot \frac{I_T}{l} = I_T \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

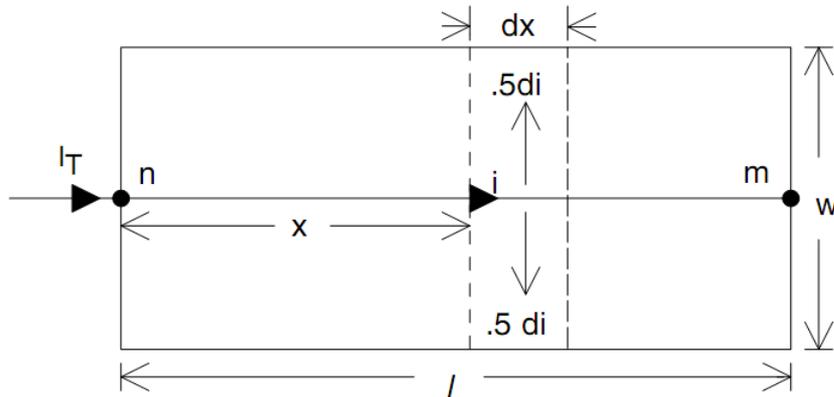
$$dV = \operatorname{Re}(z \cdot i \cdot dx) = \operatorname{Re}\left[z \cdot I_T \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot dx\right]$$

$$V_{\text{drop}} = \int_0^l dV = \operatorname{Re}\left[z \cdot I_T \cdot \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot dx\right]$$

$$V_{\text{drop}} = \operatorname{Re}\left(z \cdot I_T \cdot \frac{1}{2} \cdot l\right) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T\right]$$

Se puede notar que este es el mismo resultado para cargas uniformemente distribuidas en un alimentador, con la única diferencia en la manera de determinar la corriente total  $I_T$ .

# Pérdidas de potencia



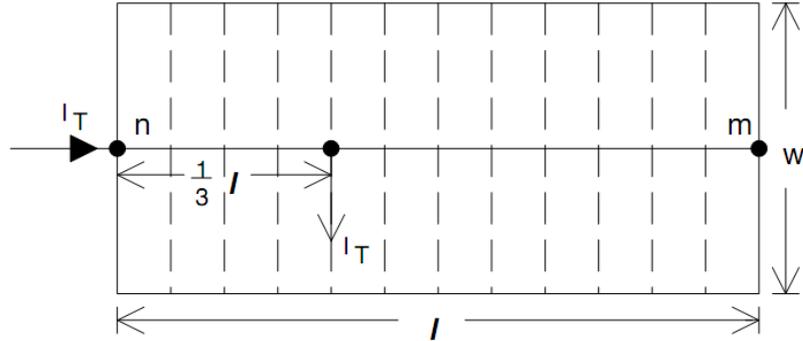
$$\begin{aligned} dp &= 3 \cdot |i|^2 \cdot r \cdot dx = 3 \cdot \left[ |I_T|^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \cdot r \cdot dx \right] \\ &= 3 \cdot r \cdot |I_T|^2 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) \cdot dx \end{aligned}$$

$$P_{\text{loss}} = \int_0^l dp = 3 \cdot r \cdot |I_T|^2 \cdot \int_0^l \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) \cdot dx$$

$$P_{\text{loss}} = 3 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot r \cdot l \cdot |I_T|^2 \right] = 3 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot R \cdot |I_T|^2 \right]$$

Se puede notar nuevamente que este es el mismo resultado para cargas uniformemente distribuidas, con la única diferencia en la manera de determinar la corriente total  $I_T$ .

## Ejemplo 6



El área a la cual se desea alimentar es de 10.000 ft de largo y 6.000 ft de ancho.

La densidad de carga es de 2500  $kVA/milla^2$ .

Impedancia del alimentador:

$$z = 0.306 + j0.6272 \Omega/mile$$

Cuál debe ser el nivel de tensión estandarizado mínimo que puede ser usado sin exceder una caída de tensión del 3% en cualquier punto del alimentador. Las tensiones a seleccionar son: 4,16 kV o 12,47 kV.

## Ejemplo 6

Área de suministro:

$$l = \frac{10,000}{5280} = 1.8939 \text{ miles} \quad w = \frac{6000}{5280} = 1.1364 \text{ miles}$$

$$A = l \cdot w = 2.1522 \text{ miles}^2$$

$$kVA = D \cdot A = 2500 \cdot 2.1522 = 5380.6 \text{ kVA}$$

Impedancia del alimentador:

$$Z = z \cdot l = (0.306 + j0.6272) \cdot 1.8939 = 0.5795 + j1.1879 \Omega$$

Para 4,16 kV:

$$I_T = \frac{kVA}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} = \frac{5380.6}{\sqrt{3} \cdot 4.16} \angle_{-\cos^{-1}(0.9)} = 746.7 \angle_{-25.84} \text{ A}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{drop}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T \right] = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \cdot (0.5795 + j1.1879) \cdot 746.7 \angle_{-25.84} \right] \\ &= 388.1 \text{ V} \end{aligned}$$

## Ejemplo 6

El porcentaje de caída de tensión:

$$V_{\%} = \frac{V_{\text{drop}}}{V_{LN}} \cdot 100\% = \frac{388.1}{2401.8} \cdot 100\% = 16.16\%$$

Para 12,47 kV:

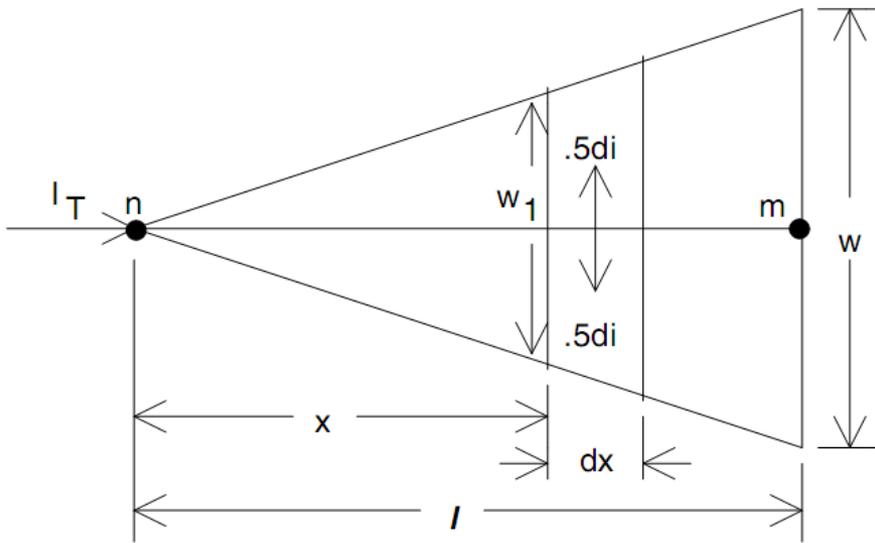
$$I_T = \frac{kVA}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} = \frac{5380.6}{\sqrt{3} \cdot 12.47} \angle -\cos^{-1}(0.9) = 249.1 \angle -25.84 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{drop}} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \cdot Z \cdot I_T \right] = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \cdot (0.5795 + j1.1879) \cdot 249.1 \angle -25.84 \right] \\ &= 129.5 \text{ V} \end{aligned}$$

$$V_{\%} = \frac{V_{\text{drop}}}{V_{LN}} \cdot 100\% = \frac{129.5}{7199.6} \cdot 100\% = 1.80\%$$

$$P_{\text{loss}} = 3 \cdot \left[ \frac{\frac{1}{3} \cdot R \cdot |I_T|^2}{1000} \right] = 3 \cdot \left[ \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5795 \cdot 249.1^2}{1000} \right] = 35.965 \text{ kW}$$

# Área Triangular



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot w$$

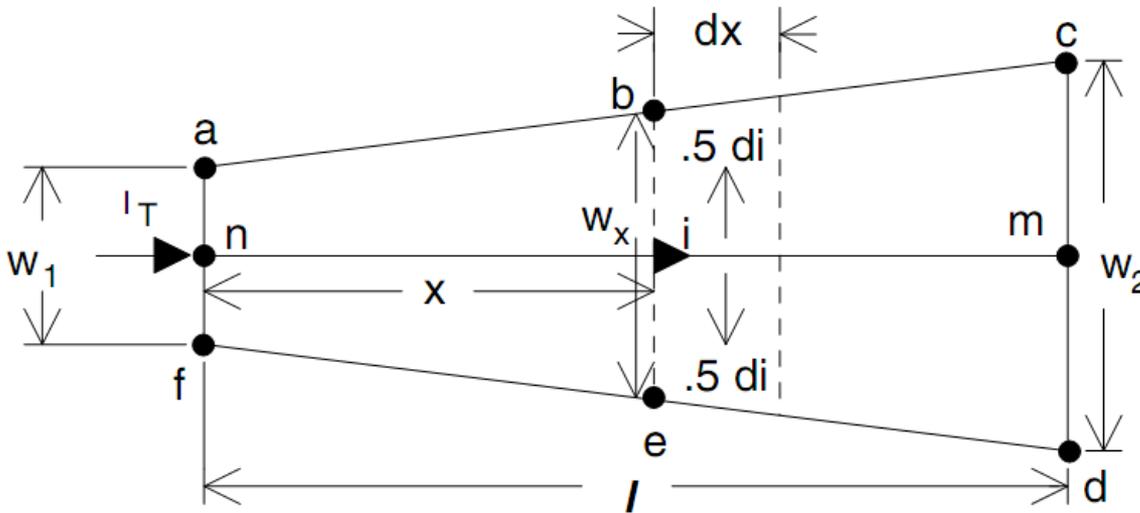
$$I_T = \frac{D \cdot \text{Area}}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}} / \cos^{-1}(PF) \text{ A}$$

$$V_{\text{drop}} = \text{Re} \left[ z \cdot I_T \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right] = \text{Re} \left[ \frac{2}{3} \cdot Z_T \cdot I_T \right]$$

$$P_{\text{loss}} = 3 \cdot \left[ \frac{8}{15} \cdot R \cdot |I_T|^2 \right]$$

$$Z_T = z \cdot l$$

# Área Trapezoidal



$$I_T = \frac{D \cdot \text{Area}_T}{\sqrt{3} \cdot kV_{LL}}$$

$$\text{Area}_T = \frac{1}{2} \cdot (w_2 + w_1) \cdot l$$

$$V_{\text{drop}} = \text{Re} \left[ Z \cdot I_T \cdot \left( \frac{w_1 + 2 \cdot w_2}{3 \cdot (w_1 + w_2)} \right) \right]$$

$$P_{\text{loss}} = 3 \cdot \left\{ R \cdot |I_T|^2 \cdot \left[ \frac{8 \cdot w_2^2 + 9 \cdot w_1 \cdot w_2 + 3 \cdot w_1^2}{15 \cdot (w_1 + w_2)^2} \right] \right\}$$

Las áreas rectangular y triangular son casos específicos de esta última.

# *Ecuaciones de Carson*

El fundamento de estas ecuaciones se basa en la característica inherente de desbalance de los sistemas de distribución, por lo cual para análisis más precisos, las asunciones y simplificaciones presentadas previamente ya no tienen aplicación (transposición, espaciamientos entre conductores, tamaños de los conductores, etc.).

En 1926, Carson desarrolla una técnica para determinar las impedancias propias y mutuas de un número arbitrario de conductores, aéreos o subterráneos. Su uso se hace extensivo gracias a las ventajas computacionales existentes.

El fundamento importante es que se asume la tierra como un plano infinito con resistividad constante, estableciendo el método de las imágenes.

# Recordatorio de los análisis aproximados

Impedancia serie de Líneas aéreas

$$L_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{I_i} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} \text{ H/m} \quad L_{in} = \frac{\lambda_{in}}{I_n} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{1}{D_{in}} \text{ H/m}$$

Para líneas transpuestas

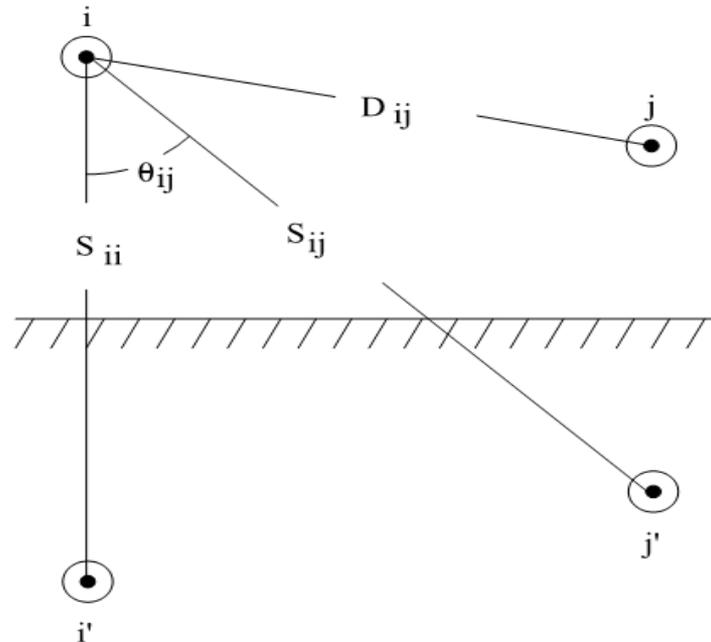
$$L_i = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_{eq}}{\text{GMR}_i} \text{ H/m} \quad D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab} \cdot D_{bc} \cdot D_{ca}} \text{ ft.}$$

$$x_i = \omega \cdot L_i = 0.12134 \cdot \ln \frac{D_{eq}}{\text{GMR}_i} \text{ } \Omega/\text{mile}$$

$$z_i = r_i + j \cdot 0.12134 \cdot \ln \frac{D_{eq}}{\text{GMR}_i} \text{ } \Omega/\text{mile}$$

# Ecuaciones de Carson

Impedancia propia y mutua de un conductor  $i$ :



$$\hat{Z}_{ii} = r_i + 4\omega P_{ii}G + j \left( X_i + 2\omega G \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} + 4\omega Q_{ii}G \right) \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{Z}_{ij} = 4\omega P_{ij}G + j \left( 2\omega G \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ii}} + 4\omega Q_{ij}G \right) \Omega/\text{mile}$$

# Ecuaciones de Carson

**Donde:**

$\hat{z}_{ii}$  = Impedancia propia del conductor  $i$  en  $\Omega$ /milla

$\hat{z}_{ij}$  = Impedancia mutua entre los conductores  $i$  y  $j$  en  $\Omega$ /milla

$r_i$  = Resistencia del conductor  $i$  en  $\Omega$ /milla

$\omega = 2\pi f$  = Frecuencia angular en rad/s

$G = 0.1609344 \times 10^{-3} \Omega/\text{mile}$

$RD_i$  = Radio del conductor  $i$  en ft.

$GMR_i$  = Radio medio geométrico del conductor  $i$  en ft.

$\rho$  = Resistividad de la tierra en  $\Omega/\text{m}$

$D_{ij}$  = Distancia entre los conductores  $i$  y  $j$  en ft.

$S_{ij}$  = Distancia entre el conductor  $i$  y el conductor imagen  $j$  en ft.

$\theta_{ij}$  = Ángulo entre el par de líneas: la que une el conductor  $i$  con su imagen y la que lo une con el conductor  $j$ .

# Ecuaciones de Carson Modificadas

De forma simplificada:

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0.00158836 \cdot f + j0.00202237 \cdot f \left( \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} + 7.6786 + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho}{f} \right)$$

$$\hat{z}_{ij} = 0.00158836 \cdot f + j0.00202237 \cdot f \left( \ln \frac{1}{D_{ij}} + 7.6786 + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho}{f} \right)$$

Para 60 Hz y resistividad del terreno de 100 Ohm/m, las ecuaciones de Carson modificadas son:

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{D_{ij}} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}.$$

# ***Matriz de impedancia primitiva de líneas aéreas***

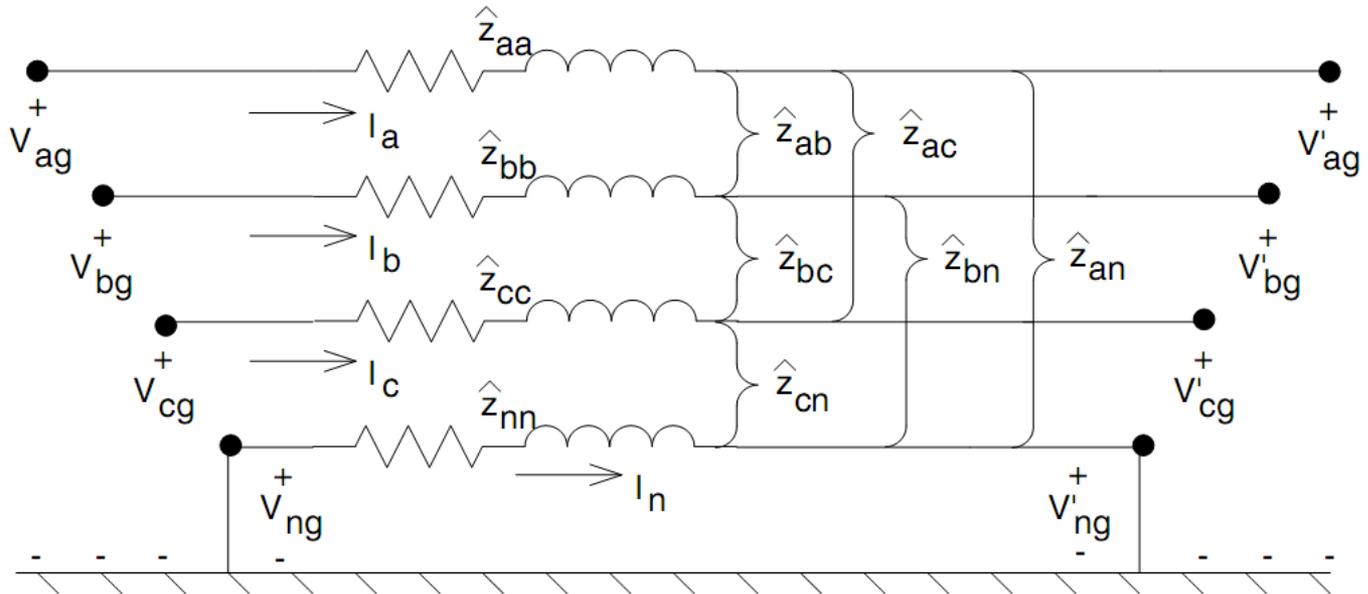
***La construcción de la matriz de impedancia primitiva:***

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{D_{ij}} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}.$$

# Matriz de impedancias de fase de líneas aéreas

Para la mayoría de aplicaciones, la matriz de impedancia primitiva requiere ser reducida a una matriz 3 x 3 que contenga las impedancias equivalentes propias y mutuas para las tres fases.



Segmento de línea de cuatro hilos, conexión estrella aterrizada

# Representación matricial

$$\begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \\ V_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_{ag} \\ V'_{bg} \\ V'_{cg} \\ V'_{ng} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{z}_{aa} & \hat{z}_{ab} & \hat{z}_{ac} & \hat{z}_{an} \\ \hat{z}_{ba} & \hat{z}_{bb} & \hat{z}_{bc} & \hat{z}_{bn} \\ \hat{z}_{ca} & \hat{z}_{cb} & \hat{z}_{cc} & \hat{z}_{cn} \\ \hat{z}_{na} & \hat{z}_{nb} & \hat{z}_{nc} & \hat{z}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [V_{abc}] \\ [V_{ng}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [V'_{abc}] \\ [V'_{ng}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\hat{z}_{ij}] & [\hat{z}_{in}] \\ [\hat{z}_{nj}] & [\hat{z}_{nn}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [I_{abc}] \\ [I_n] \end{bmatrix}$$

$$[V_{abc}] = [V'_{abc}] + [\hat{z}_{ij}] \cdot [I_{abc}] + [\hat{z}_{in}] \cdot [I_n]$$

$$[0] = [0] + [\hat{z}_{nj}] \cdot [I_{abc}] + [\hat{z}_{nn}] \cdot [I_n]$$

## Forma final de la reducción de Kron:

$$[z_{abc}] = [\widehat{z}_{ij}] - [\widehat{z}_{in}] \cdot [\widehat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\widehat{z}_{nj}]$$

$$[z_{abc}] = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

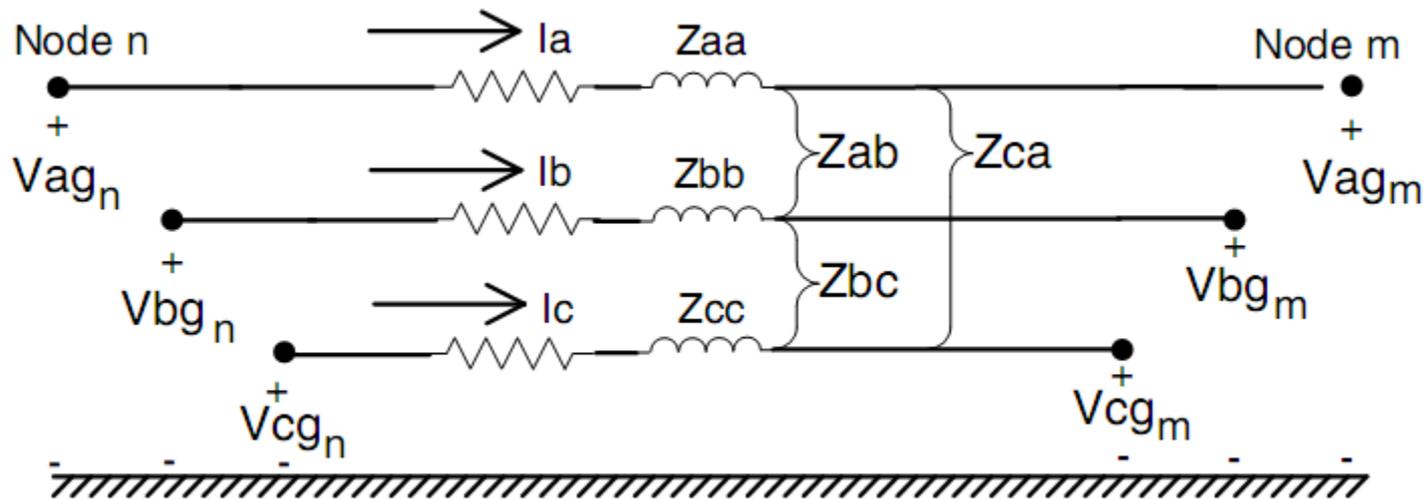
Para una línea de distribución no transpuesta, los elementos de la diagonal no son iguales y tampoco los elementos fuera de la diagonal. Sin embargo, la matriz si es simétrica.

Para una línea bifásica, fases *a* y *c*, la matriz de impedancias de fase sería:

$$[z_{abc}] = \begin{bmatrix} z_{ab} & 0 & z_{ac} \\ 0 & 0 & 0 \\ z_{ca} & 0 & z_{cc} \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

# Matriz de impedancias de fase

Se usa para determinar con precisión las caídas de tensión en los segmentos de línea de los alimentadores, una vez las corrientes se han determinado.



Modelo de segmento de línea trifásico

# Matriz de impedancias de fase

Ecuación de tensiones:

$$\begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$[VLG_{abc}]_n = [VLG_{abc}]_m + [Z_{abc}] \cdot [I_{abc}]$$

# Impedancias de secuencia

Definición de tensiones de secuencia:

$$[A_s] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_s^2 & a_s \\ 1 & a_s & a_s^2 \end{bmatrix} \quad a_s = 1.0 / \underline{120} \quad [A_s]^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_s & a_s^2 \\ 1 & a_s^2 & a_s \end{bmatrix}$$

$$[VLG_{abc}] = [A_s] \cdot [VLG_{012}]$$

$$[I_{abc}] = [A_s] \cdot [I_{012}]$$

$$[VLG_{012}]_n = [A_s]^{-1} \cdot [VLG_{abn}]_m + [A_s]^{-1} \cdot [Z_{abc}] \cdot [A_s] \cdot [I_{012}]$$

$$[VLG_{012}]_n = [VLG_{012}]_m + [Z_{012}] \cdot [I_{012}]$$

# Impedancias de secuencia

Finalmente:

$$[Z_{012}] = [A_s]^{-1} \cdot [Z_{abc}] \cdot [A_s] = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} VLG_0 \\ VLG_1 \\ VLG_2 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} VLG_0 \\ VLG_1 \\ VLG_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$Z_{00}$  = Impedancia de secuencia cero

$Z_{11}$  = Impedancia de secuencia positiva

$Z_{22}$  = Impedancia de secuencia negativa

Los elementos fuera de la diagonal representan los acoplamientos mutuos entre secuencias

# Observaciones importantes

Para una línea transpuesta, la matriz de impedancias debe ser modificada de tal forma que:

- La matriz de impedancias de fase tiene los elementos iguales en su diagonal.
- Los elementos fuera de la diagonal principal también son todos iguales.
- El procedimiento usual para modificarla consiste en:

$$[Z_{abc}] = \begin{bmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$
$$Z_s = \frac{1}{3} \cdot (Z_{aa} + Z_{bb} + Z_{cc}) \Omega/\text{mile}$$
$$Z_m = \frac{1}{3} \cdot (Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}) \Omega/\text{mile}$$

# *Observaciones importantes*

Para una línea transpuesta, la matriz de impedancias de secuencias:

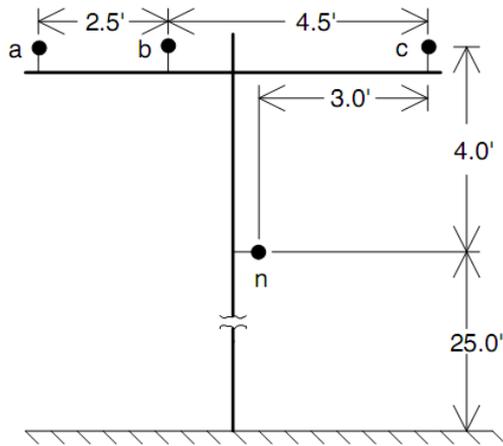
- Los elementos fuera de la diagonal son cero.
- Las impedancias de secuencia se determinan directamente a partir de :

$$z_{00} = z_s + 2 \cdot z_m \quad \Omega/\text{mile}$$

$$z_{11} = z_{22} = z_s - z_m \quad \Omega/\text{mile}$$

# Ejemplo 7

Una línea aérea trifásica de distribución es construida como se muestra en la figura:



**Conductores de fase:**

$$\text{GMR} = 0.0244 \text{ ft}$$

$$\text{Resistance} = 0.306 \ \Omega/\text{mile}$$

**Conductor neutro:**

$$\text{GMR} = 0.00814 \text{ ft.}$$

$$\text{Resistance} = 0.5920 \ \Omega/\text{mile}$$

$$D_{ab} = 2.5 \text{ ft.}$$

$$D_{bc} = 4.5 \text{ ft.}$$

$$D_{ca} = 7.0 \text{ ft.}$$

$$D_{an} = 5.6569 \text{ ft.}$$

$$D_{bn} = 4.272 \text{ ft.}$$

$$D_{cn} = 5.0 \text{ ft.}$$

**Para la fase a:**

$$\hat{z}_{aa} = 0.0953 + 0.306 + j0.12134 \cdot \left( \ln \frac{1}{0.0244} + 7.93402 \right)$$

$$= 0.4013 + j1.4133 \ \Omega/\text{mile}$$

## Ejemplo 7

Se requiere:

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{D_{ij}} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}.$$

$$[\hat{z}] = \begin{bmatrix} 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.8515 & 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7524 \\ 0.0953 + j0.8515 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7802 & 0.0953 + j0.7865 \\ 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7802 & 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.7674 \\ 0.0953 + j0.7524 & 0.0953 + j0.7865 & 0.0953 + j0.7674 & 0.6873 + j1.5465 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

## Ejemplo 7

Para determinar la matriz de impedancias de fase operando la matriz primitiva:

$$[\hat{z}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.4013 + j1.4133 & 0.0953 + j0.8515 & 0.0953 + j0.7266 \\ 0.0953 + j0.8515 & 0.4013 + j1.4133 & j0.0943 + j0.7802 \\ 0.0953 + j0.7266 & 0.0953 + j0.7802 & 0.4013 + j1.4133 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{in}] = \begin{bmatrix} 0.0953 + j0.7524 \\ 0.0953 + j0.7865 \\ 0.0953 + j0.7674 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile} \quad [\hat{z}_{nn}] = [0.6873 + j1.5465] \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{nj}] = [0.0953 + j0.7524 \quad 0.0953 + j0.7865 \quad 0.0953 + j0.7674] \Omega/\text{mile}$$

$$[z_{abc}] = [\hat{z}_{ij}] - [\hat{z}_{in}] \cdot [\hat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\hat{z}_{nj}]$$

## Ejemplo 7

Finalmente la matriz de impedancias de fase:

$$[z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.4576 + j1.0780 & 0.1560 + j.5017 & 0.1535 + j0.3849 \\ 0.1560 + j0.5017 & 0.4666 + j1.0482 & 0.1580 + j0.4236 \\ 0.1535 + j0.3849 & 0.1580 + j0.4236 & 0.4615 + j1.0651 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

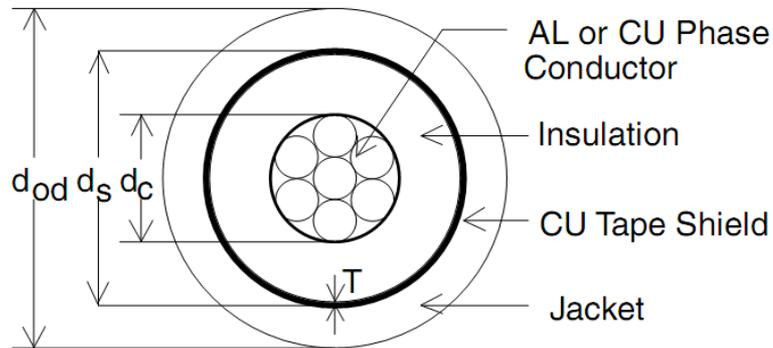
La matriz de impedancias de secuencia:

$$[z_{012}] = [A_s]^{-1} \cdot [z_{abc}] \cdot [A_s]$$

$$[z_{012}] = \begin{bmatrix} 0.7735 + j1.9373 & 0.0256 + j0.0115 & -0.0321 + j0.0159 \\ -0.0321 + j0.0159 & 0.3061 + j0.6270 & -0.0723 - j0.0060 \\ 0.0256 + j0.0115 & 0.0723 - j0.0059 & 0.3061 + j0.6270 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

# Impedancia serie de cables subterráneos

Cables apantallado (Tape - shielded):



$$r_{\text{shield}} = 7.9385 \times 10^8 \frac{\rho}{d_s \cdot T} \Omega/\text{mile}$$

$$\text{GMR}_{\text{shield}} = \frac{d_s - \frac{T}{1000}}{24} \text{ ft.}$$

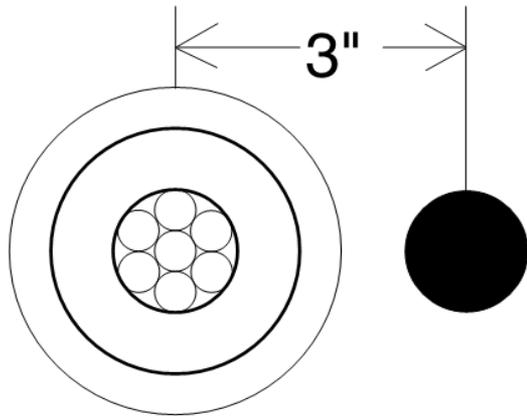
Radio del punto medio al blindaje  $D_{ij} = \text{GMR}_{\text{shield}}$  (ft.)

$$\hat{z}_{ii} = r_i + 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{\text{GMR}_i} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile}$$

$$\hat{z}_{ij} = 0.09530 + j0.12134 \left( \ln \frac{1}{D_{ij}} + 7.93402 \right) \Omega/\text{mile.}$$

# Ejemplo

Un circuito monofásico fase b:



$$\rho = 2.3715 \times 10^{-8} \text{ } \Omega\text{-meter.}$$

$$r_{\text{shield}} = 7.9385 \times 10^8 \cdot \frac{\rho}{d_s \cdot T}$$
$$= 7.9385 \times 10^8 \cdot \frac{2.3715 \times 10^{-8}}{0.88 \cdot 5} = 4.2785 \text{ } \Omega\text{/mile}$$

$$\text{GMR}_{\text{shield}} = \frac{d_s - \frac{T}{1000}}{24} = \frac{0.88 - \frac{5}{1000}}{24} = 0.0365 \text{ ft}$$

Para el conductor de fase

$$d_s = 0.88 \text{ inches}$$

$$\text{Resistance} = 0.97 \text{ } \Omega\text{/mile}$$

$$\text{GMR}_p = 0.0111 \text{ ft.}$$

$$T = 5 \text{ mils}$$

Para el conductor de neutro:

$$\text{Resistance} = 0.607 \text{ } \Omega\text{/mile}$$

$$\text{GMR}_n = 0.01113 \text{ ft.}$$

$$D_{nm} = 3 \text{ inches}$$

## Ejemplo

**Número de conductores:**

- #1 = 1/0 AA conductor
- #2 = tape shield
- #3 = 1/0 copper ground

**Distancias entre conductores:**

$$D_{12} = \text{GMR}_{\text{shield}} = 0.0365 \text{ (ft.)}$$

$$D_{13} = \frac{3}{12} = 0.25 \text{ (ft.)}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{11} &= 0.0953 + 0.97 + j0.12134 \cdot \left( \ln \frac{1}{0.0111} + 7.93402 \right) \\ &= 1.0653 + j1.5088 \text{ } \Omega/\text{mile}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{z}_{22} &= 0.0953 + 4.2786 + j0.12134 \cdot \left( \ln \frac{1}{0.0365} + 7.93402 \right) \\ &= 4.3739 + j1.3645 \text{ } \Omega/\text{mile}\end{aligned}$$

## Ejemplo

Matriz de impedancia primitiva:

$$[\hat{z}] = \begin{bmatrix} 1.0653 + j1.5088 & 0.0953 + j1.3645 & 0.0953 + j1.1309 \\ 0.0953 + j1.3645 & 4.3739 + j1.3645 & 0.0953 + j1.1309 \\ 0.0953 + j1.1309 & 0.0953 + j1.1309 & 0.7023 + j1.5085 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

$$[\hat{z}_{ij}] = [1.0653 + j1.5088]$$

$$[\hat{z}_{in}] = [0.0953 + j1.3645 \quad 0.0953 + j1.1309]$$

$$[\hat{z}_{nj}] = \begin{bmatrix} 0.0953 + j1.3645 \\ 0.0953 + j1.1309 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{z}_{nn}] = \begin{bmatrix} 4.3739 + j1.3645 & 0.0953 + j1.1309 \\ 0.0953 + j1.1309 & 0.7023 + j1.5085 \end{bmatrix}$$

$$z_{1p} = [\hat{z}_{ij}] - [\hat{z}_{in}] \cdot [\hat{z}_{nn}]^{-1} \cdot [\hat{z}_{nj}]$$

$$z_{1p} = 1.3219 + j0.6743 \Omega/\text{mile.}$$

$$[z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3219 + j0.6743 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

# Admitancia “Shunt” de líneas aéreas y subterráneas

Para líneas aéreas:

$$V_{ig} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( q_i \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} + q_j \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \right)$$

$S_{ii}$  = distancia del conductor  $i$  a su imagen  $i'$

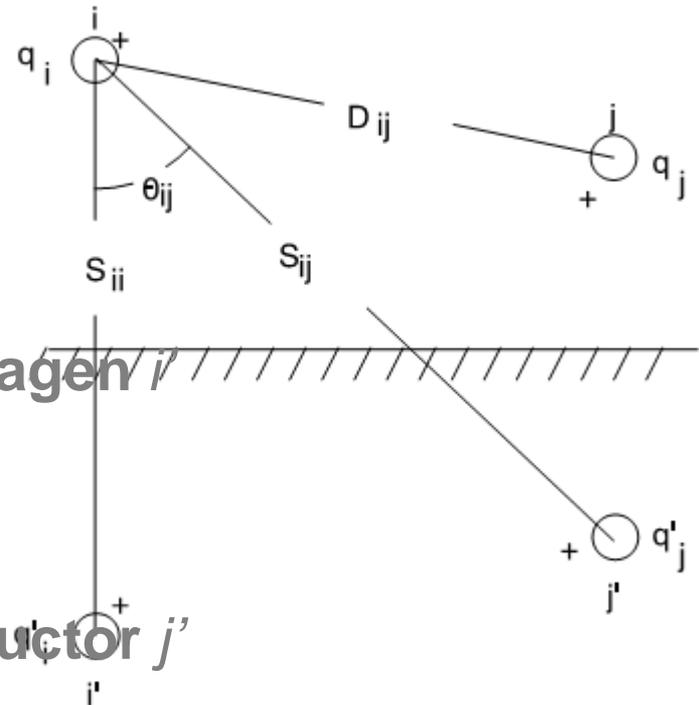
$S_{ij}$  = distancia del conductor  $i$  a la imagen del conductor  $j$

$D_{ij}$  = distancia del conductor  $i$  al conductor  $j'$

$RD_i$  = Radio del conductor  $i$

$$V_{ig} = \hat{P}_{ii} \cdot q_i + \hat{P}_{ij} \cdot q_j$$

Donde  $P_{ii}$  y  $P_{ij}$  son los coeficientes de potencial propios y mutuos respectivamente.



**Teniendo en cuenta:**

$$\epsilon_{\text{air}} = 1.0 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/meter}$$

$$\epsilon_{\text{air}} = 1.4240 \times 10^{-2} \mu\text{F/mile}$$

$$\hat{P}_{ii} = 11.17689 \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} \text{ mile}/\mu\text{F}$$

$$\hat{P}_{ij} = 11.17689 \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \text{ mile}/\mu\text{F}$$

Para una línea aérea de n conductores, la matriz primitiva de coeficientes de potencial se construye:

$$[\hat{P}_{\text{primitive}}] = \begin{bmatrix} \hat{P}_{aa} & \hat{P}_{ab} & \hat{P}_{ac} & \bullet & \hat{P}_{an} \\ \hat{P}_{ba} & \hat{P}_{bb} & \hat{P}_{bc} & \bullet & \hat{P}_{bn} \\ \hat{P}_{ca} & \hat{P}_{cb} & \hat{P}_{cc} & \bullet & \hat{P}_{cn} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hat{P}_{na} & \hat{P}_{nb} & \hat{P}_{nc} & \bullet & \hat{P}_{nn} \end{bmatrix} \quad [\hat{P}_{\text{primitive}}] = \begin{bmatrix} [\hat{P}_{ij}] & [\hat{P}_{in}] \\ [\hat{P}_{nj}] & [\hat{P}_{nn}] \end{bmatrix}$$

A través de la reducción de Kron, teniendo en cuenta que el neutro se encuentra aterrizado:

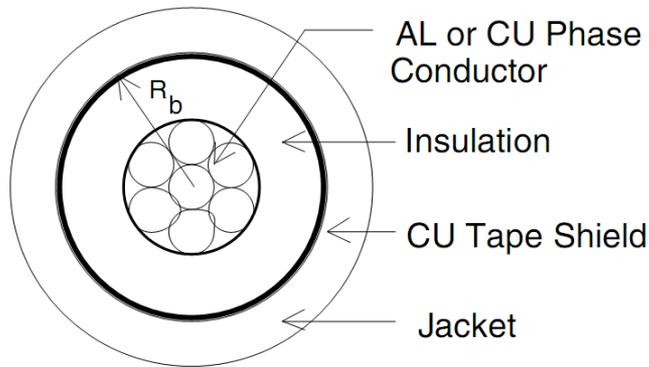
$$[P_{abc}] = [\hat{P}_{ij}] - [\hat{P}_{in}] \cdot [\hat{P}_{nn}]^{-1} \cdot [\hat{P}_{nj}]$$

$$[C_{abc}] = [P_{abc}]^{-1}$$

Despreciando la conductancia paralelo:

$$[y_{abc}] = 0 + j \cdot \omega \cdot [C_{abc}] \text{ } \mu\text{S/mile}$$

# Líneas subterráneas: Cable apantallado

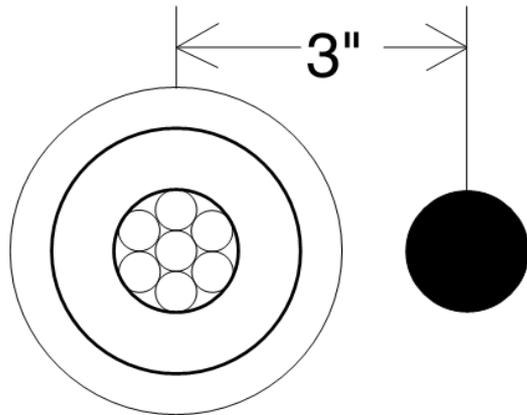


$$RD_c = \frac{d_c}{2}$$

$$y_{ag} = 0 + j \frac{77.3619}{\ln \frac{R_b}{RD_c}} \mu\text{S/mile}$$

**Ejemplo:**

$$R_b = \frac{d_s - T}{2} = \frac{0.88 - 0.005}{2} = 0.4375 \text{ inch}$$



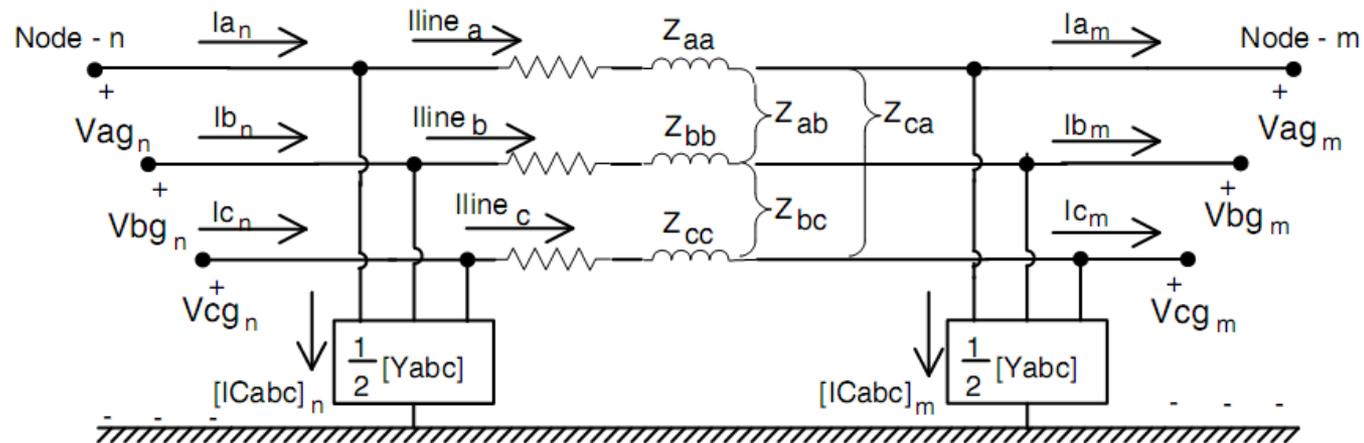
T = 5mm

Diámetro del conductor de fase: 0.368 inch

$$RD_c = \frac{d_p}{2} = \frac{0.368}{2} = 0.1840 \text{ inch}$$

$$y_{bg} = j \frac{77.3619}{\ln \left( \frac{R_b}{RD_c} \right)} = j \frac{77.3619}{\ln \left( \frac{0.4375}{0.184} \right)} = j89.3179 \mu\text{S/mile}$$

# Modelo de una línea en sistemas de distribución



$$[Iline_{abc}]_n = [I_{abc}]_m + \frac{1}{2} [Y_{abc}] \cdot [VLG_{abc}]_m$$

$$\begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_m + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \end{bmatrix}_m$$

## Según la ley de tensiones de Kirchhoff

$$[VLG_{abc}]_n = [VLG_{abc}]_m + [Z_{abc}] \cdot [Iline_{abc}]_m$$

$$\begin{bmatrix} Vag \\ Vbg \\ Vcg \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} Vag \\ Vbg \\ Vcg \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix}_m$$

$$[VLG_{abc}]_n = [VLG_{abc}]_m + [Z_{abc}] \cdot \left\{ [I_{abc}]_m + \frac{1}{2} [Y_{abc}] \cdot [VLG_{abc}]_m \right\}$$

$$[VLG_{abc}]_n = [a] \cdot [VLG_{abc}]_m + [b] \cdot [I_{abc}]_m$$

$$[a] = [U] + \frac{1}{2} \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}] \quad [b] = [Z_{abc}]$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Respecto a la corriente de entrada:*

$$[I_{abc}]_n = [Iline_{abc}]_m + \frac{1}{2} \cdot [Y_{abc}] \cdot [VLG_{abc}]_n$$

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} Iline_a \\ Iline_b \\ Iline_c \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vag \\ Vbg \\ Vcg \end{bmatrix}_n$$

$$[I_{abc}]_n = [c] \cdot [VLG_{abc}]_m + [d] \cdot [I_{abc}]_m$$

$$[c] = [Y_{abc}] + \frac{1}{4} \cdot [Y_{abc}] \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}]$$

$$[d] = [U] + \frac{1}{2} \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}]$$

**Finalmente:**

$$\begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_n \\ [I_{abc}]_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_m \\ [I_{abc}]_m \end{bmatrix}$$

Esta expresión es muy similar a la ecuación usada en el análisis de líneas de transmisión. Sin embargo los parámetros abcd en este caso son matrices (Matrices Generalizadas).

$$\begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_m \\ [I_{abc}]_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_n \\ [I_{abc}]_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_m \\ [I_{abc}]_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [d] & -[b] \\ -[c] & [a] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [VLG_{abc}]_n \\ [I_{abc}]_n \end{bmatrix}$$

$$[VLG_{abc}]_m = [a] \cdot [VLG_{abc}]_n - [b] \cdot [I_{abc}]_n$$

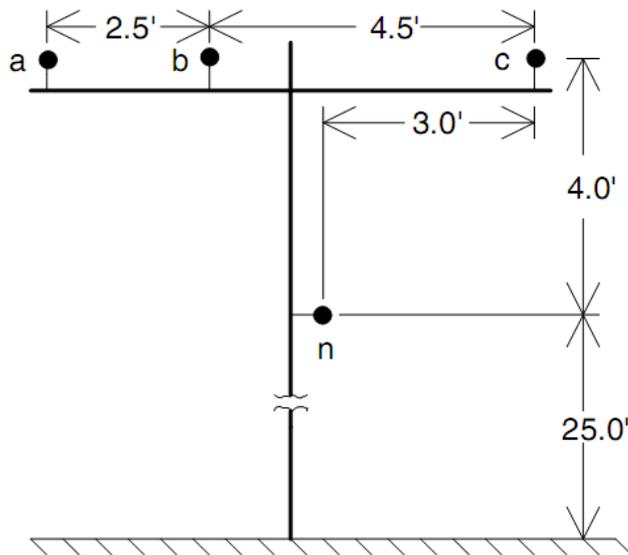
$$[I_{abc}]_m = -[c] \cdot [VLG_{abc}]_n + [d] \cdot [I_{abc}]_n$$

## Ejemplo 8

La matriz de impedancias de fase ya conocida:

$$[Z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.4576 + j1.0780 & 0.1560 + j.5017 & 0.1535 + j0.3849 \\ 0.1560 + j0.5017 & 0.4666 + j1.0482 & 0.1580 + j0.4236 \\ 0.1535 + j0.3849 & 0.1580 + j0.4236 & 0.4615 + j1.0651 \end{bmatrix} \Omega/\text{mile}$$

Para determinar la matriz de admitancia paralelo:



$$[S] = \begin{bmatrix} 58 & 58.0539 & 58.4209 & 54.1479 \\ 58.0539 & 58 & 58.1743 & 54.0208 \\ 58.4209 & 58.1743 & 58 & 54.0833 \\ 54.1479 & 54.0208 & 54.0833 & 50 \end{bmatrix} \text{ft}$$

## Ejemplo 8

Cálculo de los coeficientes de potencial:

$$\hat{P}_{ii} = 11.17689 \cdot \ln \frac{S_{ii}}{RD_i} \text{ mile}/\mu\text{F} \quad \hat{P}_{aa} = 11.17689 \ln \frac{58}{0.03004} = 84.5600 \text{ mile}/\mu\text{F}$$

$$\hat{P}_{ij} = 11.17689 \cdot \ln \frac{S_{ij}}{D_{ij}} \text{ mile}/\mu\text{F} \quad \hat{P}_{ab} = 11.17689 \ln \frac{58.0539}{2.5} = 35.1522 \text{ mile}/\mu\text{F}$$

$$[\hat{P}_{\text{primitive}}] = \begin{bmatrix} 84.5600 & 35.1522 & 23.7147 & 25.2469 \\ 35.4522 & 84.5600 & 28.6058 & 28.359 \\ 23.7147 & 28.6058 & 84.5600 & 26.6131 \\ 25.2469 & 28.359 & 26.6131 & 85.6659 \end{bmatrix} \text{ mile}/\mu\text{F}$$

## Ejemplo 8

A partir de:

$$[P_{abc}] = [\hat{P}_{ij}] - [\hat{P}_{in}] \cdot [\hat{P}_{nn}]^{-1} \cdot [\hat{P}_{nj}]$$

$$[P_{abc}] = \begin{bmatrix} 77.1194 & 26.7944 & 15.8714 \\ 26.7944 & 75.172 & 19.7957 \\ 15.8714 & 19.7957 & 76.2923 \end{bmatrix} \text{ mile}/\mu\text{F}$$

Finalmente:

$$[C_{abc}] = [P_{abc}]^{-1} \quad [C_{abc}] = [P]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.015 & -0.0049 & -0.0019 \\ -0.0019 & 0.0159 & -0.0031 \\ -0.0019 & -0.0031 & 0.0143 \end{bmatrix} \mu\text{f}/\text{mile}$$

$$[y_{abc}] = j \cdot 376.9911 \cdot [C_{abc}] = \begin{bmatrix} j5.6712 & -j1.8362 & -j0.7034 \\ -j1.8362 & j5.9774 & -j1.169 \\ -j0.7034 & -j1.169 & j5.3911 \end{bmatrix} \mu\text{S}/\text{mile}$$

## Ejemplo 8

b. Con  $[Z_{abc}]$  y  $[Y_{abc}]$  para los 10.000 ft., :

$$[Z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.8667 + j2.0417 & 0.2955 + j0.9502 & 0.2907 + j0.7290 \\ 0.2955 + j0.9502 & 0.8837 + j1.9852 & 0.2992 + j0.8023 \\ 0.2907 + j0.7290 & 0.2992 + j0.8023 & 0.8741 + j2.0172 \end{bmatrix} \Omega$$

$$[Y_{abc}] = \begin{bmatrix} j10.7409 & -j3.4777 & -j1.3322 \\ -j3.4777 & j11.3208 & -j2.2140 \\ -j1.3322 & -j2.2140 & j10.2104 \end{bmatrix} \mu S$$

**Matrices generalizadas:**

$$[VLG_{abc}]_n = [a] \cdot [VLG_{abc}]_m + [b] \cdot [I_{abc}]_m$$

$$[I_{abc}]_n = [c] \cdot [VLG_{abc}]_m + [d] \cdot [I_{abc}]_m$$

$$[a] = [U] + \frac{1}{2} \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}]$$

$$[b] = [Z_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.8667 + j2.0417 & 0.2955 + j0.9502 & 0.2907 + j0.7290 \\ 0.2955 + j0.9502 & 0.8837 + j1.9852 & 0.2992 + j0.8023 \\ 0.2907 + j0.7290 & 0.2992 + j0.8023 & 0.8741 + j2.0172 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo 8

$$[c] = [Y_{abc}] + \frac{1}{4} \cdot [Y_{abc}] \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}]$$

$$[d] = [U] + \frac{1}{2} \cdot [Z_{abc}] \cdot [Y_{abc}]$$

En la carga:

$$\begin{bmatrix} V_{ag} \\ V_{bg} \\ V_{cg} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 7199.56 / \underline{0} \\ 7199.56 / \underline{-120} \\ 7199.56 / \underline{120} \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$|I|_m = \frac{6000}{\sqrt{3} \cdot 12.47} = 277.79$$

$$[I_{abc}]_m = \begin{bmatrix} 277.79 / \underline{-25.84} \\ 277.79 / \underline{-145.84} \\ 277.79 / \underline{94.16} \end{bmatrix} \text{ A}$$

## Ejemplo 8

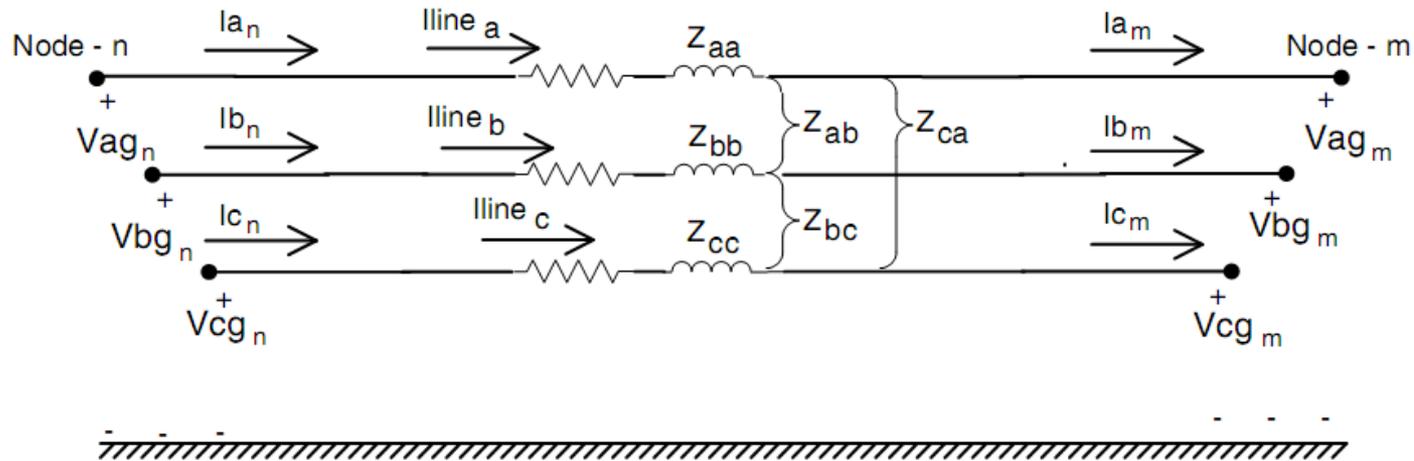
Las tensiones de fase y corrientes en el lado de la fuente:

$$[VLG_{abc}]_n = [a] \cdot [VLG_{abc}]_m + [b] \cdot [I_{abc}]_m = \begin{bmatrix} 7538.70 / \underline{1.57} \\ 7451.25 / \underline{-118.30} \\ 7485.11 / \underline{121.93} \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[I_{abc}]_n = [c] \cdot [VLG_{abc}]_m + [d] \cdot [I_{abc}]_m = \begin{bmatrix} 277.71 / \underline{-25.83} \\ 277.73 / \underline{-148.82} \\ 277.73 / \underline{94.17} \end{bmatrix} \text{ A}$$

# El Modelo de Línea Modificado

Generalmente la admitancia en paralelo de la línea es muy pequeña de tal forma que puede despreciarse.



Las matrices generalizadas se convierten en:

$$[a] = [U] \quad [c] = [0] \quad [VLG_{abc}]_m = [a] \cdot [VLG_{abc}]_n - [b] \cdot [I_{abc}]_n$$

$$[b] = [Z_{abc}] \quad [d] = [U] \quad [I_{abc}]_m = -[c] \cdot [VLG_{abc}]_n + [d] \cdot [I_{abc}]_n$$

## Ejemplo 9

Tensiones y corrientes medidas en la fuente de alimentación:

$$[VLG_{abc}]_n = \begin{bmatrix} 7199.56 / \underline{0} \\ 7199.56 / \underline{-120} \\ 7199.56 / \underline{120} \end{bmatrix} \text{ V} \quad \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 249.97 / \underline{-24.5} \\ 277.56 / \underline{-145.8} \\ 305.54 / \underline{95.2} \end{bmatrix} \text{ A}$$

Las matrices generalizadas:

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$[b] = \begin{bmatrix} 0.8666 + j2.0417 & 0.2954 + j0.9501 & 0.2907 + j0.7290 \\ 0.2954 + j0.9501 & 0.8838 + j1.9852 & 0.2993 + j0.8024 \\ 0.2907 + j0.7290 & 0.2993 + j0.8024 & 0.8740 + j2.0172 \end{bmatrix} \Omega$$

## Ejemplo 9

También:

$$[I_{abc}]_m = [I_{abc}]_n \quad \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 249.97 / \underline{-24.5} \\ 277.56 / \underline{-145.8} \\ 305.54 / \underline{95.2} \end{bmatrix} \text{ A}$$

Las tensiones de fase:

$$[VLG_{abc}]_m = \begin{bmatrix} 6942.53 / \underline{-1.47} \\ 6918.35 / \underline{-121.55} \\ 6887.71 / \underline{117.31} \end{bmatrix} \text{ V}$$

Las tensiones de línea:

$$\begin{bmatrix} V_{ab} \\ V_{bc} \\ V_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6942.53 / \underline{-1.47} \\ 6918.35 / \underline{-121.55} \\ 6887.71 / \underline{117.31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12008.43 / \underline{28.43} \\ 12024.62 / \underline{-92.19} \\ 11903.23 / \underline{148.05} \end{bmatrix} \text{ V}$$

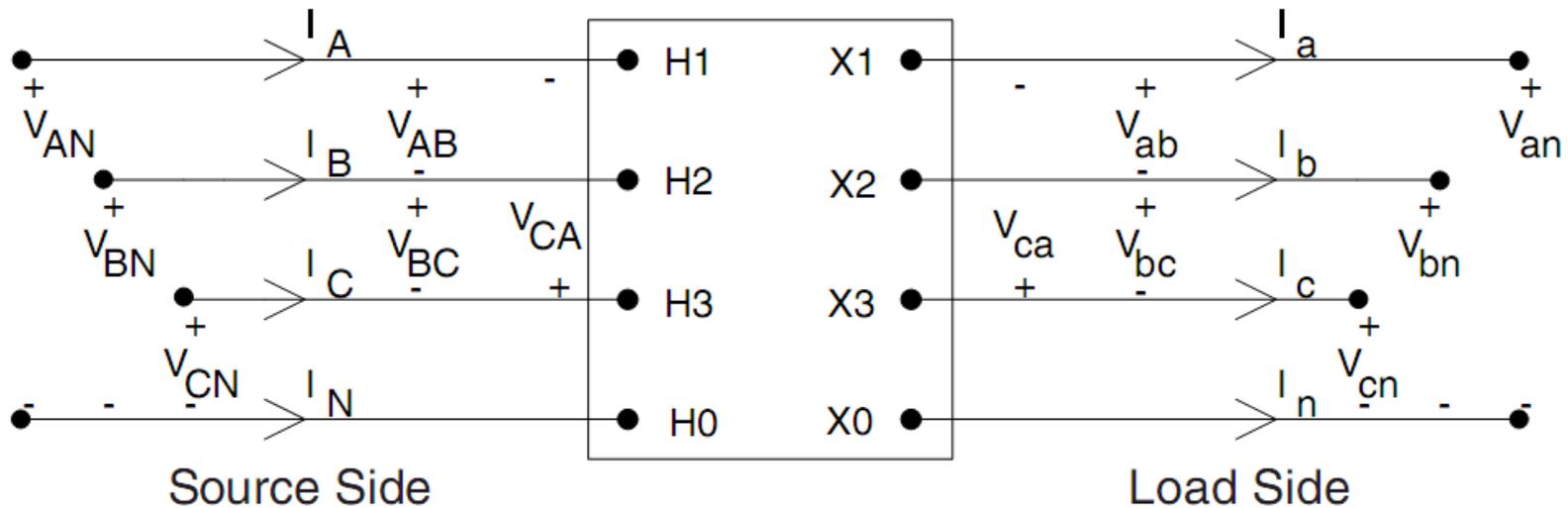
## Ejemplo 9

La potencia compleja de la carga:

$$\begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix} = \frac{1}{1000} \cdot \begin{bmatrix} V_{ag} \cdot I_a^* \\ V_{bg} \cdot I_b^* \\ V_{cg} \cdot I_c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1735.42 / \underline{23.03} \\ 1920.26 / \underline{24.25} \\ 2104.47 / \underline{22.11} \end{bmatrix} \text{ kVA}$$

# Modelo del Transformador

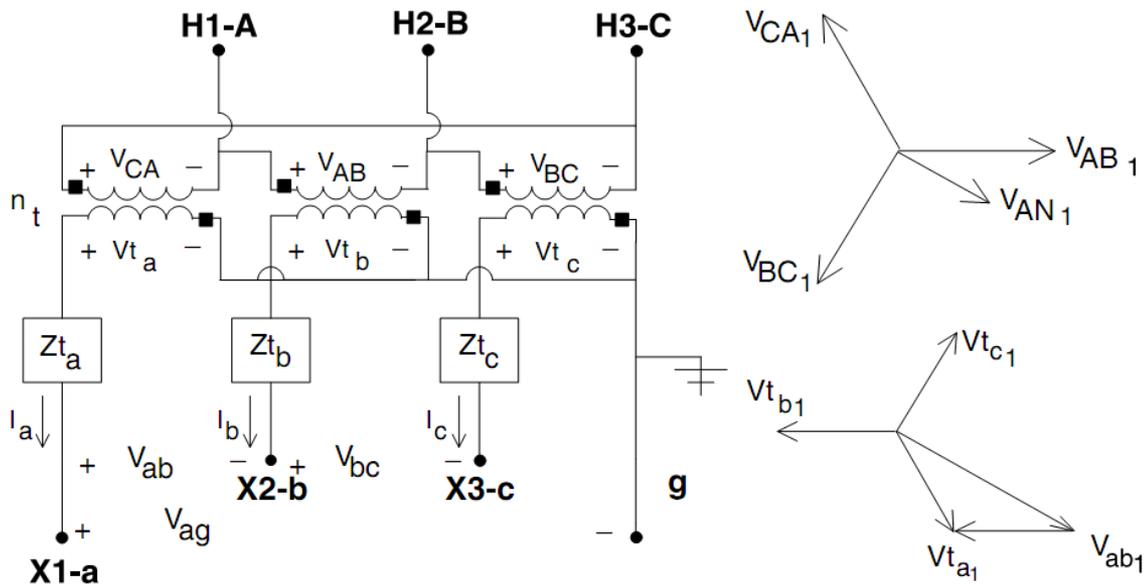
El modelo general de un transformador trifásico:



$$[VLN_{ABC}] = [a_t] \cdot [VLN_{abc}] + [b_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[I_{ABC}] = [c_t] \cdot [VLN_{abc}] + [d_t] \cdot [I_{abc}]$$

# Transformador Delta- Y aterrizado



$$a_t = \frac{VLL_{\text{Rated High Side}}}{VLL_{\text{Rated Low Side}}}$$

$$\begin{bmatrix} V_{AB} \\ V_{BC} \\ V_{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n_t & 0 \\ 0 & 0 & -n_t \\ -n_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vt_a \\ Vt_b \\ Vt_c \end{bmatrix}$$

$$[VLL_{ABC}] = [AV] \cdot [Vt_{abc}]$$

$$[AV] = \begin{bmatrix} 0 & -n_t & 0 \\ 0 & 0 & -n_t \\ -n_t & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conociendo las tensiones de línea, se pueden transformar a tensiones de secuencia:

$$[VLL_{012}] = [A_s]^{-1} \cdot [VLL_{ABC}] \quad [A_s] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_s^2 & a_s \\ 1 & a_s & a_s^2 \end{bmatrix} \quad a_s = 1.0 / \underline{120}$$

Las relaciones entre las secuencias de las tensiones de fase y de línea:

$$\begin{bmatrix} VLN_0 \\ VLN_1 \\ VLN_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t_s^* & 0 \\ 0 & 0 & t_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VLL_0 \\ VLL_1 \\ VLL_2 \end{bmatrix} \quad [VLN_{012}] = [T] \cdot [VLL_{012}]$$

$$t_s = \frac{1}{\sqrt{3}} / 30$$

A partir de las tensiones de secuencia por fase:

$$[VLN_{ABC}] = [A_s] \cdot [VLN_{012}] \quad [VLN_{ABC}] = [A_s] \cdot [T] \cdot [VLL_{012}]$$

Realizando nuevas sustituciones:

$$[VLN_{ABC}] = [W] \cdot [VLL_{ABC}]$$

$$[W] = [A_s] \cdot [T] \cdot [A_s]^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta expresión es importante porque puede ser usada para las diferentes conexiones de transformadores.

Finalmente:

$$[VLN_{ABC}] = [W] \cdot [AV] \cdot [Vt_{abc}] = [a_t] \cdot [Vt_{abc}]$$

$$[a_t] = [W] \cdot [AV] = \frac{-n_t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las tensiones ideales como función de las tensiones en terminales:

$$[Vt_{abc}] = [VLG_{abc}] + [Zt_{abc}] \cdot [I_{abc}] \quad [Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} Zt_a & 0 & 0 \\ 0 & Zt_b & 0 \\ 0 & 0 & Zt_c \end{bmatrix}$$

$$[VLN_{ABC}] = [a_t] \cdot ([VLG_{abc}] + [Zt_{abc}] \cdot [I_{abc}])$$

$$[VLN_{ABC}] = [a_t] \cdot [VLG_{abc}] + [b_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[b_t] = [a_t] \cdot [Zt_{abc}] = \frac{-n_t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot Zt_b & Zt_c \\ Zt_a & 0 & 2 \cdot Zt_c \\ 2 \cdot Zt_a & Zt_b & 0 \end{bmatrix}$$

También se deriva que para el proceso inverso:

$$[VLG_{abc}] = [A_t] \cdot [VLN_{ABC}] - [B_t] \cdot [I_{abc}]$$

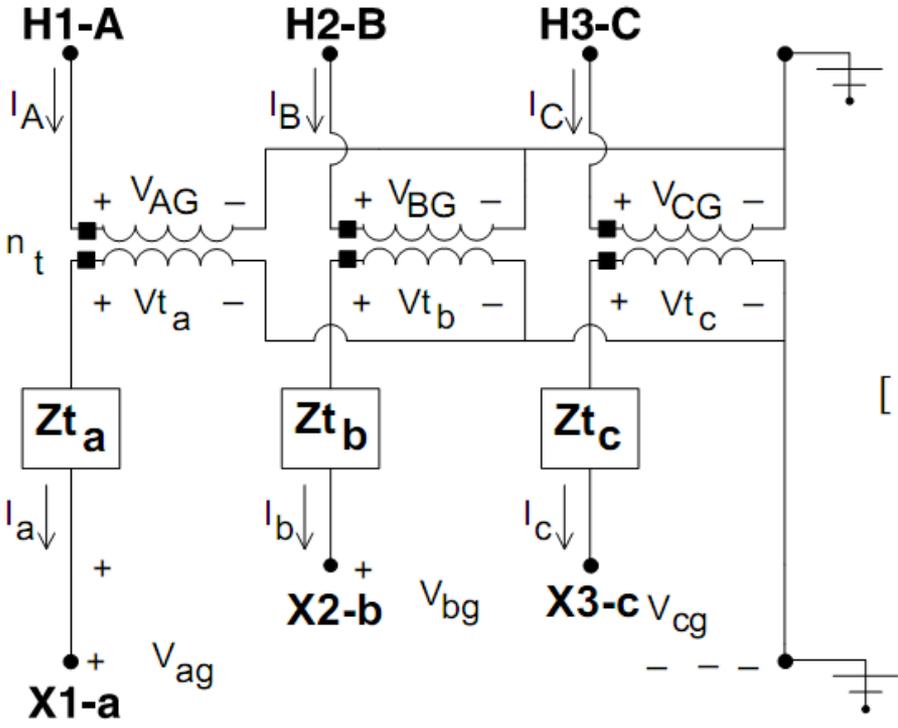
$$[A_t] = \frac{1}{n_t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [B_t] = [Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} Zt_a & 0 & 0 \\ 0 & Zt_b & 0 \\ 0 & 0 & Zt_c \end{bmatrix}$$

Respecto a las corrientes:

$$[I_{ABC}] = [c_t] \cdot [VLG_{abc}] + [d_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[d_t] = [D] \cdot [AI] = \frac{1}{n_t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [c_t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Transformador Y-Y aterrizado



$$\begin{bmatrix} V_{AG} \\ V_{BG} \\ V_{CG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_t & 0 & 0 \\ 0 & n_t & 0 \\ 0 & 0 & n_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{t_a} \\ V_{t_b} \\ V_{t_c} \end{bmatrix}$$

$$[VLG_{ABC}] = [AV] \cdot [VLG_{abc}] + [AV] \cdot [Zt_{abc}] \cdot [I_{abc}]$$

$$[a_t] = [AV] = \begin{bmatrix} n_t & 0 & 0 \\ 0 & n_t & 0 \\ 0 & 0 & n_t \end{bmatrix}$$

$$[b_t] = [AV] \cdot [Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} n_t \cdot Zt_a & 0 & 0 \\ 0 & n_t \cdot Zt_b & 0 \\ 0 & 0 & n_t \cdot Zt_c \end{bmatrix}$$

$$[I_{ABC}] = [d_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[d_t] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_t} \end{bmatrix}$$

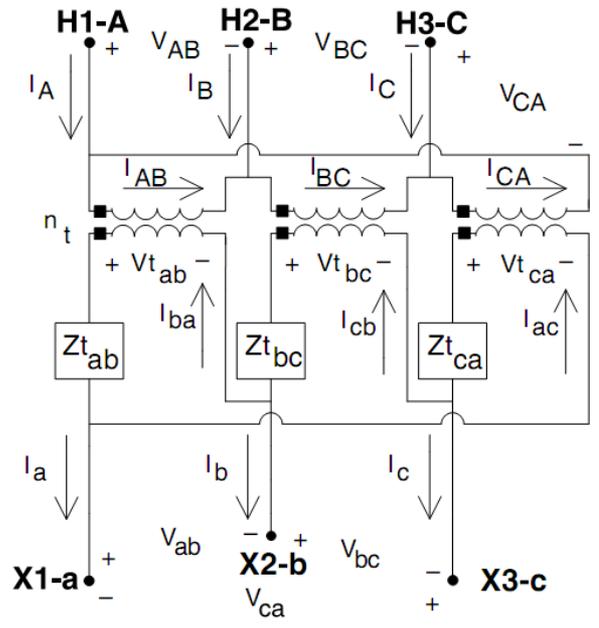
Para el proceso inverso:

$$[VLG_{abc}] = [A_t] \cdot [VLN_{ABC}] - [B_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[A_t] = [AV]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_t} \end{bmatrix}$$

$$[B_t] = \begin{bmatrix} Zt_a & 0 & 0 \\ 0 & Zt_b & 0 \\ 0 & 0 & Zt_c \end{bmatrix}$$

# Transformador Delta-delta:



$$[VLN_{ABC}] = [a_t] \cdot [VLN_{abc}] + [b_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[a_t] = \frac{n_t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[b_t] = [W] \cdot [AV] \cdot [Zt_{abc}] \cdot [G1]$$

Donde:

$$[Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} Zt_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & Zt_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & Zt_{ca} \end{bmatrix}$$

$$[W] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[G1] = \frac{1}{Zt_{ab} + Zt_{bc} + Zt_{ca}} \cdot \begin{bmatrix} Zt_{ca} & -Zt_{bc} & 0 \\ Zt_{ca} & Zt_{ab} + Zt_{ca} & 0 \\ -Zt_{ab} - Zt_{bc} & -Zt_{bc} & 0 \end{bmatrix}$$

Para el proceso inverso:

$$[VLG_{abc}] = [A_t] \cdot [VLN_{ABC}] - [B_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[A_t] = \frac{1}{3 \cdot n_t} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad [B_t] = [W] \cdot [Zt_{abc}] \cdot [G1]$$

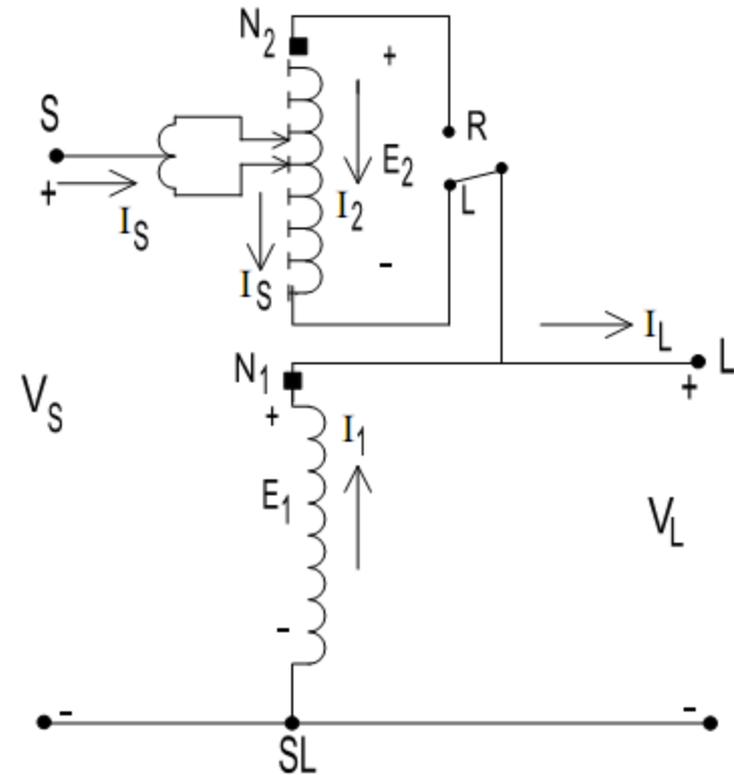
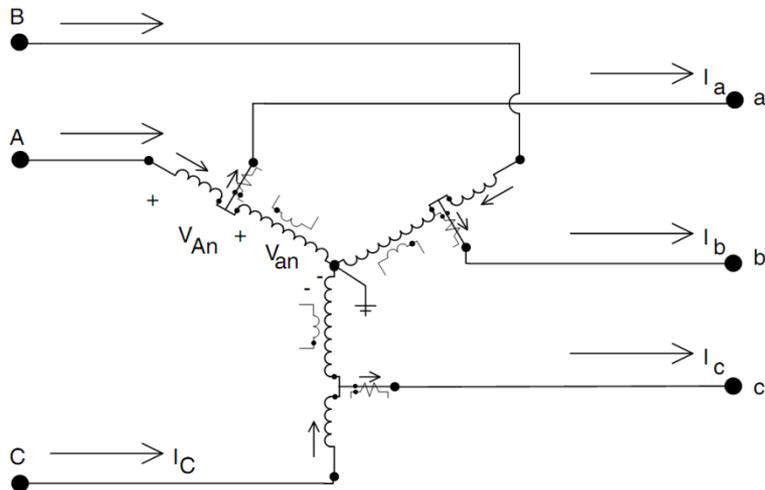
La ecuación generalizada para las corrientes:

$$[I_{ABC}] = [d_t] \cdot [I_{abc}]$$

$$[d_t] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_t} \end{bmatrix}$$

# Regulador Trifásico de Tensión

Reguladores conectados en Y:



# Regulador Trifásico de Tensión

Ecuaciones de tensión y corriente:

$$\frac{E_1}{N_1} = \frac{E_2}{N_2}$$

$$N_1 \cdot I_1 = N_2 \cdot I_2$$

$$V_S = E_1 + E_2$$

$$I_L = I_S + I_1$$

$$V_L = E_1$$

$$I_2 = I_S$$

$$E_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot E_1 = \frac{N_2}{N_1} \cdot V_L$$

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} \cdot I_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot I_S$$

$$V_S = \left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right) \cdot V_L$$

$$I_L = \left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right) \cdot I_S$$

$$V_S = a_R \cdot V_L$$

$$I_L = a_R \cdot I_S$$

$$a_R = 1 + \frac{N_2}{N_1}$$

# Regulador Trifásico de Tensión

Reguladores conectados en Y:

$$[VLN_{ABC}] = [a] \cdot [VLN_{abc}] + [b] \cdot [I_{abc}]$$

$$\begin{bmatrix} V_{An} \\ V_{Bn} \\ V_{Cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ra} & 0 & 0 \\ 0 & a_{Rb} & 0 \\ 0 & 0 & a_{Rc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix} \quad [a] = \begin{bmatrix} a_{Ra} & 0 & 0 \\ 0 & a_{Rb} & 0 \\ 0 & 0 & a_{Rc} \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I_{ABC}] = [c] \cdot [VLG_{abc}] + [d][I_{abc}]$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{Ra}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{Rb}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{Rc}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad [c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [d] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{Ra}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{Rb}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{Rc}} \end{bmatrix}$$

La relación efectiva de vueltas debe satisfacer:

$0.9 \leq a_{R abc} \leq 1.1$  in 32 steps of 0.625%/step (0.75 V/step on 120-V base)

$$a_R = 1 \mp 0.00625 \cdot Tap$$

## Ejemplo 10

Matrices generalizadas de la línea que alimenta la carga desbalanceada:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} 0.8667 + j2.0417 & 0.2955 + j0.9502 & 0.2907 + j0.7290 \\ 0.2955 + j0.9502 & 0.8837 + j1.9852 & 0.2992 + j0.8023 \\ 0.2907 + j0.7290 & 0.2992 + j0.8023 & 0.8741 + j2.0172 \end{bmatrix}$$

Tensiones y corrientes en la subestación:

$$[VLN_{ABC}] = \begin{bmatrix} 7200 / 0 \\ 7200 / -120 \\ 7200 / 120 \end{bmatrix} \text{ V} \quad [I_{abc}] = [I_{ABC}] = \begin{bmatrix} 258 / -20 \\ 288 / -147 \\ 324 / 86 \end{bmatrix} \text{ A}$$

## Las tensiones en la carga:

$$[Vload_{abc}] = [A] \cdot [VLN_{ABC}] - [B] \cdot [I_{abc}] = \begin{bmatrix} 6965.1 / \underline{-2.1} \\ 6943.1 / \underline{-121.2} \\ 6776.7 / \underline{117.8} \end{bmatrix} \text{ V}$$

El objetivo es determinar los taps del regulador en cada línea, para sobre una tensión base de 120 V, garantizar que la tensión se encuentre entre 119 y 121 V.

A partir de la relación del transformador del PT:

$$N_{pt} = \frac{7200}{120} = 60 \quad [V_{120}] = \frac{1}{60} \cdot [Vload_{abc}] = \begin{bmatrix} 116.1 / \underline{-2.1} \\ 115.7 / \underline{-121.2} \\ 112.9 / \underline{117.8} \end{bmatrix} \text{ V}$$

## El ajuste de los taps, aproximadamente:

$$Tap_a = \frac{|119 - |Vload_a||}{0.75} = \frac{|119 - 116.1|}{0.75} = 3.8736$$

$$Tap_b = \frac{|119 - |Vload_b||}{0.75} = \frac{|119 - 115.7|}{0.75} = 4.3746$$

$$Tap_c = \frac{|119 - |Vload_c||}{0.75} = \frac{|119 - 112.9|}{0.75} = 8.0723$$

$$Tap_a = +4$$

$$Tap_b = +5$$

$$Tap_c = +9$$

## Matrices generalizadas resultantes para el regulador:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 - 0.00625 \cdot 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 0.00625 \cdot 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0.00625 \cdot 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.975 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9688 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9500 \end{bmatrix}$$

$$[d] = [a]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0256 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0323 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0526 \end{bmatrix}$$

Las tensiones y corrientes medidas en la subestación son las entradas del regulador, y las tensiones y corrientes de salida del regulador son:

$$[V_{reg_{abc}}] = [a]^{-1} \cdot [VLN_{ABC}] = \begin{bmatrix} 7384.6 / 0 \\ 7432.3 / -120 \\ 7578 / 120 \end{bmatrix} \text{ V}$$

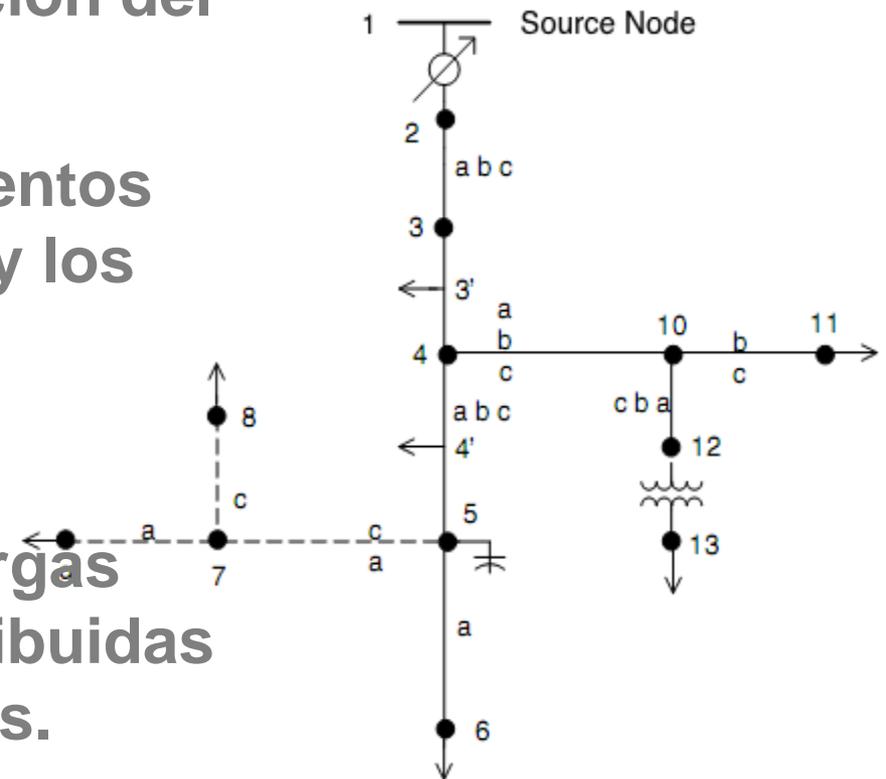
$$[I_{reg_{abc}}] = [d]^{-1} \cdot [I_{sub}] = \begin{bmatrix} 251.6 / -20 \\ 279.0 / -147 \\ 307.8 / 86 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Tensiones en la carga:

$$[V_{load_{abc}}] = [A] \cdot [V_{reg_{abc}}] - [B] \cdot [I_{reg_{abc}}] = \begin{bmatrix} 7150.7 / -2.0 \\ 7185.5 / 121.2 \\ 7179.1 / 118.1 \end{bmatrix} \text{ V}$$

# El Flujo de Carga en Alimentadores Trifásicos Desbalanceados

- Un primer elemento importante es la técnica iterativa de solución del flujo de carga.
- Componentes serie: Segmentos de línea, Transformadores y los Reguladores de Tensión.
- Componentes paralelo: Cargas concentradas, cargas distribuidas y bancos de condensadores.



## El modelo para los componentes serie:



Regido por:

$$[V_{abc}]_n = [a] \cdot [V_{abc}]_m + [b] \cdot [I_{abc}]_m$$

$$[I_{abc}]_n = [c] \cdot [V_{abc}]_m + [d] \cdot [I_{abc}]_m$$

## El modelo para los componentes paralelo:

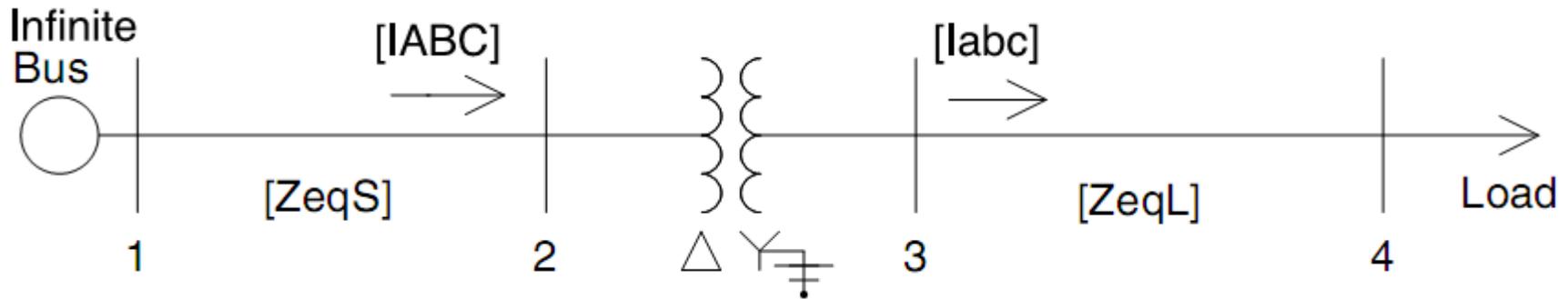
- El modelo de las cargas puede ser de: Potencia constante, Corriente constante, de Impedancia Constante o una combinación de ellas.
- Las cargas distribuidas pueden ser modeladas (Modelo Exacto) como cargas concentradas.
- Los bancos de condensadores se modelan como admitancias constantes.

## Observaciones sobre la solución del flujo de carga:

- Uso de las matrices generalizadas.
- Información precisa para el modelamiento
- Las pérdidas de potencia de un segmento de línea se deben calcular por fase, como la diferencia entre la potencia de entrada y de salida.

# Ejemplo 11

Para el siguiente problema, considerar:



- Tensiones balanceadas de 12,47 kV en el bus infinito
- Para la línea 1-2:

$$[Z_{eqS}_{ABC}] = \begin{bmatrix} 0.1414 + j0.5353 & 0.0361 + j0.3225 & 0.0361 + j0.2752 \\ 0.0361 + j0.3225 & 0.1414 + j0.5353 & 0.0361 + j0.2955 \\ 0.0361 + j0.2752 & 0.0361 + j0.2955 & 0.1414 + j0.5353 \end{bmatrix} \Omega$$

- Para la línea 3-4:

$$[Z_{eq}L_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.1907 + j0.5035 & 0.0607 + j0.2302 & 0.0598 + j0.1751 \\ 0.0607 + j0.2302 & 0.1939 + j0.4885 & 0.0614 + j0.1931 \\ 0.0598 + j0.1751 & 0.0614 + j0.1931 & 0.1921 + j0.4970 \end{bmatrix} \Omega$$

- Un transformador trifásico conectado en Delta- Y aterrizado, conformado por un banco de transformadores monofásicos cada uno de:

$$2000 \text{ kVA}, \quad 12.47 - 2.4 \text{ kV}, \quad Z = 1.0 + j6.0\%$$

- El alimentador sirve a una carga trifásica desbalanceada conectada en Y:

$$S_a = 750 \text{ kVA} \quad \text{FP} = 0,85 \text{ en atraso}$$

$$S_b = 1000 \text{ kVA} \quad \text{FP} = 0,9 \text{ en atraso}$$

$$S_c = 1250 \text{ kVA} \quad \text{FP} = 0,95 \text{ en atraso}$$

Resolver el flujo de carga para el sistema planteado.

Para el segmento de línea 1-2:

$$[a_1] = [d_1] = [U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[b_1] = [ZeqS_{ABC}]$$

$$[c_1] = [0]$$

$$[A_1] = [a_1]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B_1] = [ZeqS_{ABC}]$$

Para el segmento de línea 3-4:

$$[a_2] = [d_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[b_2] = [ZeqL_{abc}] = [B_2]$$

$$[c_2] = [0]$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el transformador:

$$Z_{\text{base}} = \frac{2.4^2 \cdot 1000}{2000} = 2.88 \ \Omega$$

$$Zt_{\text{low}} = (0.01 + j0.06) \cdot 2.88 = 0.0288 + j0.1728 \ \Omega$$

$$[Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.0288 + j0.1728 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0288 + j0.1728 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0288 + j0.1728 \end{bmatrix} \ \Omega$$

$$n_t = \frac{12.47}{2.4} = 5.1958 \quad a_t = \frac{12.47}{\sqrt{3} \cdot 2.4} = 2.9998$$

## Las matrices generalizadas del transformador:

$$[a_t] = \frac{-n_t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3.4639 & -1.7319 \\ -1.7319 & 0 & -3.4639 \\ -3.4639 & -1.7319 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[b_t] = \frac{-n_t}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot Z_t & Z_t \\ Z_t & 0 & 2 \cdot Z_t \\ 2 \cdot Z_t & Z_t & 0 \end{bmatrix} \quad [b_t] = \begin{bmatrix} 0 & -0.0998 - j0.5986 & -0.0499 - j0.2993 \\ -0.0499 - j0.2993 & 0 & -0.0998 - j0.5986 \\ -0.0998 - j0.5986 & -0.0499 - j0.2993 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[c_t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [d_t] = \frac{1}{n_t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1925 & -0.1925 & 0 \\ 0 & 0.1925 & -0.1925 \\ -0.1925 & 0 & 0.1925 \end{bmatrix}$$

$$[A_t] = \frac{1}{n_t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1925 & 0 & -0.1925 \\ -0.1925 & 0.1925 & 0 \\ 0 & -0.1925 & 0.1925 \end{bmatrix}$$

$$[B_t] = [Zt_{abc}] = \begin{bmatrix} 0.0288 + j0.1728 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0288 + j0.1728 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0288 + j0.1728 \end{bmatrix}$$

Las tensiones de línea en el bus infinito:

$$[ELL_s] = \begin{bmatrix} 12,470 / \underline{30} \\ 12,470 / \underline{-90} \\ 12,470 / \underline{150} \end{bmatrix} \text{ kV} \quad [ELN_s] = \begin{bmatrix} 7199.6 / \underline{0} \\ 7199.6 / \underline{-120} \\ 7199.6 / \underline{120} \end{bmatrix} \text{ V}$$

## Proceso iterativo para la solución del flujo de carga:

1. Suponer tensiones nominales en la carga y definición de las cargas.

$$[V4] = \begin{bmatrix} 2400 / \underline{-30} \\ 2400 / \underline{-150} \\ 2400 / \underline{90} \end{bmatrix} \text{ V} \qquad [S4] = \begin{bmatrix} 750 / \underline{31.79} \\ 1000 / \underline{25.84} \\ 1250 / \underline{18.19} \end{bmatrix} \text{ kVA}$$

2. Determinar las corrientes en el nodo 4:

$$I_{4_i} = \left( \frac{S_i \cdot 1000}{V_{4_i}} \right)^* = \begin{bmatrix} 312.5 / \underline{-61.8} \\ 416.7 / \underline{-175.8} \\ 520.8 / \underline{71.8} \end{bmatrix} \text{ A}$$

### 3. Determinar las tensiones y corrientes en el nodo 3:

$$[V3] = [a_2] \cdot [V4] + [b_2] \cdot [I4] = \begin{bmatrix} 2470.9 / -29.5 \\ 2534.4 / -148.4 \\ 2509.5 / 94.1 \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[I3] = [c_2] \cdot [V4] + [d_2] \cdot [I4] = \begin{bmatrix} 312.5 / 61.8 \\ 416.7 / -175.8 \\ 520.8 / 71.8 \end{bmatrix} \text{ A}$$

### 4. Determinar las tensiones y corrientes en el

$$[V2] = [a_t] \cdot [V3] + [b_t] \cdot [I3] = \begin{bmatrix} 7956.4 / 3.3 \\ 7344.5 / -113.4 \\ 7643.0 / 120.5 \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[I2] = [c_t] \cdot [V3] + [d_t] \cdot [I3] = \begin{bmatrix} 118.2 / -23.5 \\ 150.3 / -137.8 \\ 148.3 / 88.9 \end{bmatrix} \text{ A}$$

## 5. Determinar las tensiones de fase y corrientes en el nodo 1:

$$[V1] = [a_1] \cdot [V_2] + [b_1] \cdot [I2] = \begin{bmatrix} 7985.9 / 3.4 \\ 7370.6 / -113.2 \\ 7673.6 / 120.7 \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[I1] = [c_1] \cdot [V2] + [d_1] \cdot [I2] = \begin{bmatrix} 118.2 / -23.5 \\ 150.3 / -137.8 \\ 148.3 / 88.9 \end{bmatrix} \text{ A}$$

## 6. Tensiones de línea y error:

$$[VLL1] = [D] \cdot [V1] = \begin{bmatrix} 13,067.5 / 33.7 \\ 13,411.4 / -85.7 \\ 13,375.9 / 152.7 \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[\text{Error}]_{pu} = \frac{|[ELL_s - VLL1]|}{12,470} = \begin{bmatrix} 0.0809 \\ 0.1086 \\ 0.0876 \end{bmatrix}$$

Debido a que los errores son mayores a una tolerancia del 0,001 se continua con el proceso iterativo.

7. Tensiones en el Nodo 2, 3 y 4, usando las tensiones de referencia en el Nodo 1 y las corrientes del paso anterior.

$$[V2] = [A_t] \cdot [ELN_s] - [B_t] \cdot [I2] = \begin{bmatrix} 7171.1 / \underline{-0.1} \\ 7176.7 / \underline{-120.2} \\ 7169.3 / \underline{119.8} \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[V3] = [A_t] \cdot [V2] - [B_t] \cdot [I3] = \begin{bmatrix} 2354.0 / \underline{-31.2} \\ 2351.0 / \underline{-151.6} \\ 2349.9 / \underline{87.8} \end{bmatrix} \text{ V}$$

$$[V4] = [A_2] \cdot [V3] - [B_2] \cdot [I4] = \begin{bmatrix} 2283.7 / \underline{-31.7} \\ 2221.4 / \underline{-153.6} \\ 2261.0 / \underline{83.2} \end{bmatrix} \text{ V}$$

El siguiente paso continúa con nuevamente el cálculo de corrientes en el Nodo 4, con los nuevos valores de tensión. El barrido hacia arriba y hacia abajo se realiza hasta que el error sea menor a la tolerancia establecida.

$$[V4_{\text{final}}] = \begin{bmatrix} 2278.7 / \underline{-31.8} \\ 2199.8 / \underline{-153.5} \\ 2211.2 / \underline{83.1} \end{bmatrix} \text{ V}$$

# ***Bibliografía***

- **Distribution System Modeling and Analysis. William Kersting.**
- **Redes de Distribución de Energía. Samuel Ramírez Castaño. Tercera Edición, UNAL.**