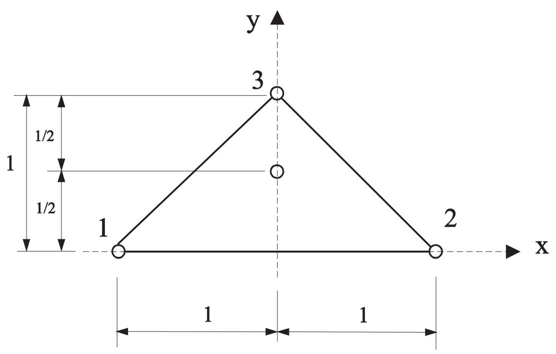
1.- Considerar el elemento finito triangular de 4 nodos mostrado en la figura.



a) Calcular las funciones de forma del elemento en coordenadas globales considerando una interpolación de la función incógnita:

$$\phi(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2$$

b) ¿ Es válido este elemento ? Justificar la respuesta.

$$\phi(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_2 & y_4 & y_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2} \\ \alpha_1 = \dfrac{\phi_2 - \phi_1}{2} \\ \alpha_2 = -1.5\phi_1 - 1.5\phi_2 - \phi_3 + 4\phi_4 \\ \alpha_3 = \phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3 - 4\phi_4 \end{cases}$$

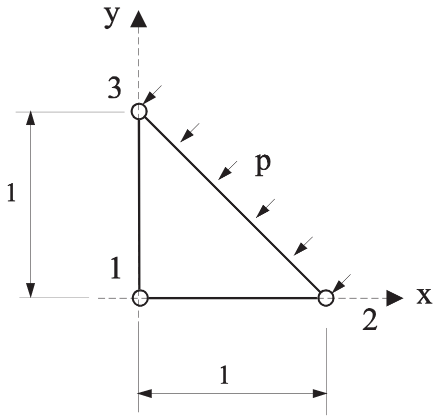
$$\rightarrow \phi(x,y) = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} x +$$
$$+(-1.5\phi_1 - 1.5\phi_2 - \phi_3 + 4\phi_4)\, y + (\phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3 - 4\phi_4)\, y^2$$

$$\rightarrow \phi(x,y) = \frac{1 - x - 3y + 2y^2}{2}\phi_1 + \frac{1 + x - 3y + 2y^2}{2}\phi_1 + y(2y-1)\phi_3 + 4y(1-y)\phi_4$$

$$\rightarrow \begin{cases} N_1(x,y) = (1 - x - 3y + 2y^2)/2 \\ N_2(x,y) = (1 + x - 3y + 2y^2)/2 \\ N_3(x,y) = y(2y-1) \\ N_4(x,y) = 4y(1-y) \end{cases}$$

La interpolación no es valida ya que, por ejemplo, N_3 no es lineal en el segmento 13.

6.- El elemento triangular lineal mostrado tiene espesor (t) constante.



a) Calcular el vector de fuerzas nodales equivalente a la presión (constante) aplicada en el lado 23.
b) Definir el mismo vector para un elemento arbitrario, es decir de coordenadas nodales (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3).

a)

$$\{f^e\} = e\int [N]^T \{p\}\, ds$$

$$\{p\} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\, p \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad [N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$[N]^T\{p\} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\, p \begin{bmatrix} N_1 & N_1 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 \end{bmatrix}^T$$

$$[N]^T\{p\}\big)_{23} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\, p \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_2 & N_2 & N_3 & N_3 \end{bmatrix}^T$$

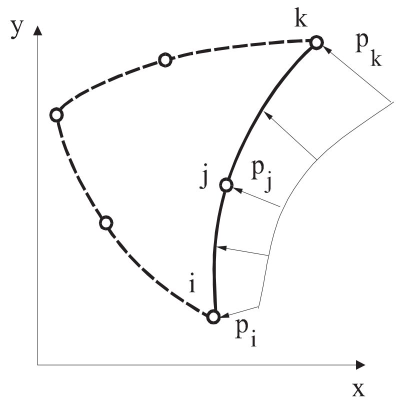
$$\int N_1\, ds = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\{f^e\} = e\int [N]^T \{p\}\, ds = -\frac{pe}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

b)

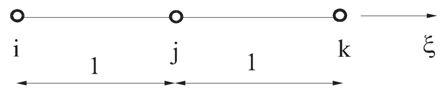
$$\{f^e\} = -\frac{pe}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \\ y_3 - y_2 \\ x_2 - x_2 \end{Bmatrix}$$

2.- Sobre un lado de un elemento cuadrático está aplicada un presión definida por su valor en los nodos correspondientes (p_i, p_j y p_k). Obtener las expresiones que permiten calcular las fuerzas por unidad de superficie en direcciones x e y para cualquier punto del lado del elemento.



Como el lado del elemento es cuadrático, utilizaremos un elemento unidimensional cuadrático para definirlo, de forma que:

$$\left| \begin{array}{l} x = \sum N_i(\xi) x_i \\ y = \sum N_i(\xi) y_i \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u = \sum N_i(\xi) u_i \\ v = \sum N_i(\xi) v_i \end{array} \right.$$



La presión p, conocido su valor en los nodos, se interpola con las funciones de forma del elemento unidimenional:

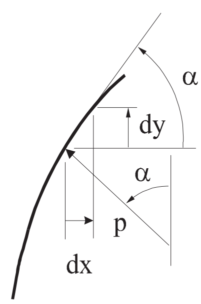
$$p(\xi) = \sum N_i(\xi) p_i$$

La dirección de la fuerza por unidad de superficie debida a p es normal al contorno, por lo que deberemos definir el ángulo α:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\dfrac{dx}{d\xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\xi}\right)^2}}$$

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\dfrac{dx}{d\xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\xi}\right)^2}}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{d\xi} = \sum \dfrac{dN_i}{d\xi} x_i \\ \dfrac{dy}{d\xi} = \sum \dfrac{dN_i}{d\xi} y_i \end{array} \right.$$



De esta forma, el vector de fuerzas por unidad de superficie es:

$$\left\{t(\xi)\right\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = p(\xi)\begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}\alpha(\xi) \\ \cos\alpha(\xi) \end{Bmatrix}$$

1.- (2.5 PTS)

Dado un elemento triangular cuadrático de lados rectos y con los nodos de los lados situados exactamente en la mitad del lado:

1.- Evaluar las funciones de forma en coordenadas de área *(L_1, L_2, L_3)*, justificando brevemente el proceso de obtención de dichas funciones de forma.

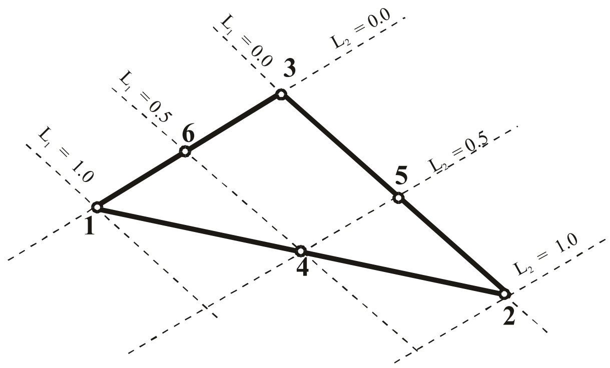
2.- Una expresión para la evaluación exacta de integrales de área, dependiente de coordenadas de área es:

$$\iint L_1^a L_2^b L_3^c dxdy = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \qquad (\Delta = \text{área del triángulo})$$

Explicar si sería posible utilizar directamente esta expresión en el caso de que el elemento triangular tuviese contornos curvos

Apartado 1

La figura muestra un elemento triangular cuadrático sobre el que se han representado algunas rectas correspondientes a la ecuación $L_i = cte$, para las coordenadas de área L_1 y L_2



Para determinar la función de forma del nodo 1, $N_1(L_1,L_2,L_3)$, recordamos que las funciones de forma han de tomar un valor unitario en el nodo al que están asociadas y 0 en los demás.

Observamos en la figura que la recta que pasa por los nodos 2, 3 y 5 corresponde a la expresiónn $L_1 = 0$, y que la recta que pasa por los nodos 4 y 6 corresponde a la expresión $L_1 - 0.5 = 0$. Por lo tanto, si N_1 incluye el producto $L_1 \cdot (L_1 - 0.5)$ la función se anulará en los nodos 2, 3, 5, 4 y 6. Para forzar además que N_1 tome el valor unitario en el nodo 1 la expresión de N_1 tendrá que ser:

$N_1 = L_1 \cdot (2L_1 - 1)$, y de la misma forma $N_2 = L_2 \cdot (2L_2 - 1)$ y $N_3 = L_3 \cdot (2L_3 - 1)$

La función de forma N_4 ha de incluir el producto $L_1 \cdot L_2$ para que sea nula en los nodos 2, 5, 3, 6 y 1, además, para que valga 1 en el nodo 4, que tiene por coordenadas $L_1=0.5$ y $L_2=0.5$, la función tendrá que ser:

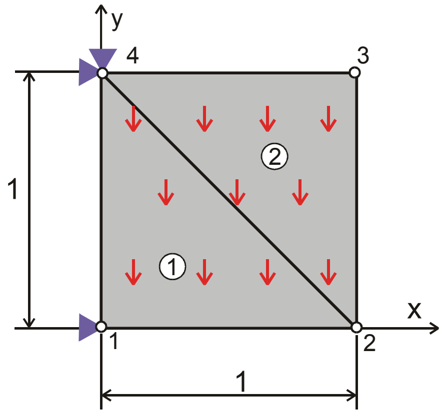
$N_4 = 4L_1L_2$, y de la misma forma $N_5 = 4L_3L_2$ y $N_6 = 4L_1L_3$

Apartado 2

Si el contorno es curvo, se ha de realizar además una transformción de coordenadas para convertir el elemento con lados rectos en un elemento con lados rectos, por lo que el integrando incluirá además al Jacobiano de la transformación de coordenadas. Debido a la complejidad adicional del integrando no se podrá aplicar directamente la expresión mostrada.

2.- (2.5 PTS)

La figura muestra una malla de elementos finitos compuesta por 2 elementos triangulares lineales de espesor unitario.



Sabiendo que la densidad del material utilizado es ρ, y que en cada elemento el vector de fuezas equivalentes en nodos debidos a fuerzas por unidad de volumen se calcula como

$$\{f_b^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV$$

Evaluar el **vector global de fuerzas equivalentes** en nodos *{F_b}* debidas a las cargas gravitatorias mostradas en la figura.

Solución:

Elemento 1:

Funciones de forma: $N_1 = 1\text{-}x\text{-}y$ $N_2 = x$ $N_4 = y$

Vector de cargas: Las cargas por unidad de volumen tienen solamente componente vertical. La fuerza de la gravedad sobre un volumen V=area·espesor será $F_g = \rho V g$ por lo que la fuerza por unidad de volumen será $|b_y| = \rho g$. Por lo tanto, el vector de cargas por unidad de volumen, teniendo en cuenta el sentido negativo de la acción de la gravedad será: $\{b\} = \{b_x, b_y\}^T = \{0, -\rho g\}^T$

Por lo tanto:

$$\{f_b^1\} = \int_{V^1} [N]^T \{b\} dV = \int_{V^1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} dV \underbrace{=}_{\text{espesor unitario}} -1 \cdot \rho g \int_{A^1} \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \\ N_4 \end{bmatrix} dA$$

Por tanto se ha de evaluar la integral de cada una de las funciones de forma sobre el área del elemento. En este elemento todas las integrales son iguales y de valor $\int N_i dA = A/3$, siendo A el área del triángulo (A=1/2). Por tanto, el vector de cargas equivalentes sobre nodo en este elemento será $\{f_b^1\} = -\frac{\rho g}{2}\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}^T$, que es equivalente a decir que la fuerza de la gravedad se concentra a partes iguales sobre los tres nodos que forman el elementos.

Elemento 2:

De la misma forma el vecto de cargas equivalentes sobre nodo en este segundo elemento será: $\left\{f_b^2\right\} = -\frac{\rho g}{2}\left[0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 1/3\right]^T$, estando referido en este caso a los nodos 2, 3 y 4 que forman este elemento.

Vector global de fuerzas equivalentes en nodos:

Expandiendo cada uno de los vectores al tamaño total del problema, y ensamblando se tendrá:

$$\left\{F_b\right\} = \left\{F_b^1\right\} + \left\{F_b^2\right\} = -\frac{\rho g}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \frac{\rho g}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} = -\frac{\rho g}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -Mg\begin{bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 2/6 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 2/6 \end{bmatrix}$$

Siendo M la masa total ($M = \rho \cdot A_{total} \cdot espesor = \rho \cdot 1 \cdot 1$)

2.- (2 PTOS)

Dado un elemento unidimensional lineal (2 nodos) en coordenadas locales:

a) Deducir y representar gráficamente sus funciones de forma estándar
b) Deducir y representar gráficamente todas las funciones de forma de elemento jerárquico cuadrático.
b) Deducir y representar gráficamente todas las funciones de forma de elemento jerárquico cubico.

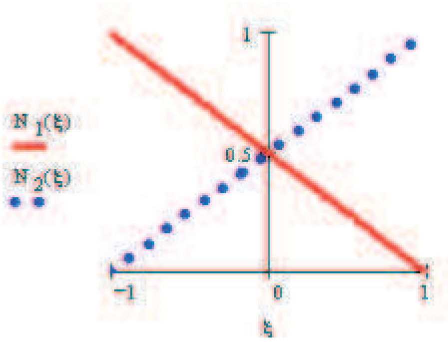
Solución:

Apartado a)

En el elemento unidimensional lineal en coordenadas locales las funciones de forma se determinan, por ejemplo, sabiendo que cada una de las funciones de forma ha de tomar valor unitario en el nodo al que está asociada y nulo en el otro.

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$



Apartado b)

Consideremos en primer lugar el caso unidimensional, inicialmente definido mediante interpolación lineal con las funciones de forma estándares:

$$u^{(1)}(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2$$

Para aumentar el grado de la interpolación, podemos incluir una nueva función de forma, N_{j2}, y el correspondiente grado de libertad asociado, a_2:

$$u^{(2)}(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 + N_{j2}(\xi)a_2$$

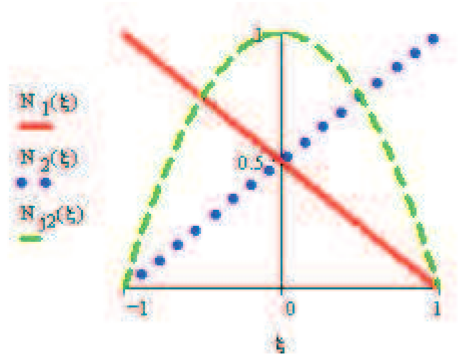
La función de forma adicional deberá ser cuadrática en este caso y cumplir la condición de que su valor en los nodos del elemento sea cero, ya que hemos mantenido las funciones de forma estándares del elemento lineal y el valor de la función incógnita en los nodos como g.d.l.. De esta forma, la nueva función de forma debe ser:

$$N_{j2} = \alpha_0 (1 - \xi^2)$$

La constante α_0 en principio puede ser arbitraria. Dependiendo de su elección obtendremos como g.d.l. a_2 una u otra magnitud escalada correspondientemente. Debemos, por lo tanto imponer una condición adicional para definir completamente la nueva función de forma, que por ejemplo, puede ser que su valor en el punto $\xi = 0$ sea la unidad. De esta forma, se obtiene:

$$N_{j2} = 1 - \xi^2$$

La representación gráfica de todas las funciones de forma del elemento jerárquico cuadrático será por tanto:



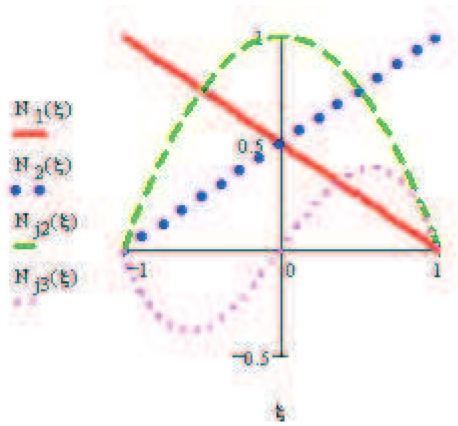
Apartado c)

Si deseamos añadir un g.d.l. adicional, debemos añadir a las funciones ya existentes una nueva función de forma polinómica cúbica:

$$N_{j3}(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3$$

Como en el caso anterior debemos exigir que sea nula en los nodos, y además podremos imponer dos condiciones adicionales. Por ejemplo, considerando que sea nula en el centro del elemento ($\xi = 0$) y tenga pendiente unitaria en dicho punto, se obtiene:

$$N_{j3}(\xi) = \xi(1 - \xi^2)$$



3.- (2 PTOS).

La tabla siguiente muestra los puntos de integración y sus correspondientes pesos, para la regla de cuadratura de Newton-Cotes.

n	ξ_i	H_i
2	-1.0	1.0
	1.0	1.0

n	ξ_i	H_i
3	-1.0	1/3
	0.0	4/3
	1.0	1/3

n	ξ_i	H_i
4	-1.0	1/4
	-1/3	3/4
	1/3	3/4
	1.0	1/4

a) Justificar que $\Sigma H_i = 2$

b) Supóngase que se dispone de una regla de cuadratura para realizar integración sobre un triángulo definido en coordenadas locales, conociéndose por tanto los valores de ξ_i y de H_i. ¿Cuánto vale en esta ocasión ΣH_i?

Apartado a)

Se puede demostrar que $\Sigma H_i = 2$ pensando que mediante la regla de cuadratura de Newton-Cotes se puede integrar de manera exacta una función constante. Supongase por ejemplo que se pretende integrar la función $f(\xi)=1$ en el intervalo $[-1,1]$. El valor exacto de dicha integral corresponde a la longitud del intervalo, es decir 2.

Por lo tanto, realizando esta integral mediante la cuadratura de Newton-Cotes, para un n ($n>1$) se tendrá

$$2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot d\xi = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) H_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot H_i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i = 2$$

De hecho, sea cual sea la regla de cuadatura utilizada el valor de ΣH_i ha de ser siempre igual a la longitud del intervalo donde se realiza la intergración.

Apartado b)

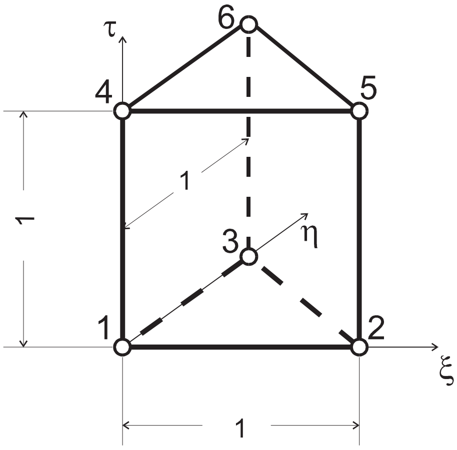
De la misma forma, en el caso de integración sobre un triangulo el valor de ΣH_i ha de corresponder al área del triángulo sobre el que se realiza la integración. Suponiendo el triángulo definido en coordenadas locales habitualmente utilizado, puesto que su área es 0.5 tendremos que $\Sigma H_i = 0.5$

3.- (2.5 PTOS)

En la figura se muestra un elemento prismático de 6 nodos de base triangular.

Un elemento finito en coordenadas reales está definido por las coordenadas definidas en la tabla. Así mismo se indican los desplazamientos nodales a los que está sometido dicho elemento.

	x	y	z	u	v	w
Nodo 1	0	0	0	0	0	0
Nodo 2	2	2	0	2	0	0
Nodo 3	0	3	0	0	0	0
Nodo 4	0	0	3	0	0	0
Nodo 5	2	2	2	2	0	0
Nodo 6	0	3	2	0	0	0



Calcular la posición en coordenadas reales y el desplazamiento del punto definido por:

$$\xi=0.2,\ \eta=0.3,\ \tau=0.5$$

Las funciones de forma de cada nodo y el valor de las mismas en el punto considerado se muestran en la siguiente tabla:

$N_i(\xi,\eta,\tau)$	$N_i(0.2,0.3,0.5)$
$N_1(\xi,\eta,\tau) = (1-\tau)(1-\xi-\eta)$	0.25
$N_2(\xi,\eta,\tau) = (1-\tau)\xi$	0.1
$N_3(\xi,\eta,\tau) = (1-\tau)\eta$	0.15
$N_4(\xi,\eta,\tau) = \tau(1-\xi-\eta)$	0.25
$N_5(\xi,\eta,\tau) = \tau\xi$	0.1
$N_6(\xi,\eta,\tau) = \tau\eta$	0.15

Una vez que se han obtenido las funciones de forma, y conociendo los valores nodales de las coordenadas globales y los desplazamientos correspondientes, la coordenadas del punto considerado y su desplazamiento se calculan mediante las siguientes ecuaciones:

$x = \Sigma N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot x_i$ $\qquad$ $u = \Sigma N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot u$

$y = N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot y$ $\qquad$ $v = \Sigma N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot v$

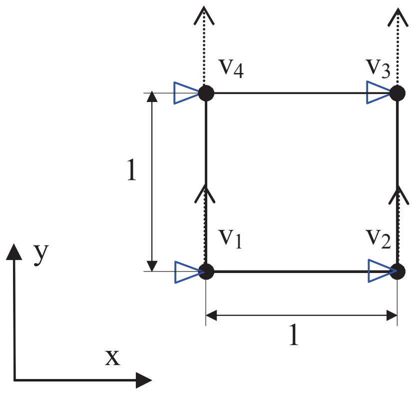
$z = \Sigma N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot z$ $\qquad$ $w = \Sigma N_i(\xi,\eta,\tau)\cdot w$

En la siguiente tabla se muestra el resultado de la aplicación de las ecuaciones anteriores.

$N_i \cdot x_i$	$N_i \cdot y_i$	$N_i \cdot z_i$	$N_i \cdot u_i$	$N_i \cdot v_i$	$N_i \cdot w_i$
0.25	0	0	0	0	0
0.1	0.2	0	0.2	0	0
0.15	0.45	0	0	0	0
0.25	0	0.75	0	0	0
0.1	0.2	0.2	0.2	0	0
0.15	0.45	0.3	0	0	0
x=0.4	y=1.3	z=1.25	u=0.4	v=0	w=0

3.- (1 PTOS).

Considérese un sólido elástico 2D, mallado con un elemento cuadrilátero lineal isoparamétrico, tal como se muestra en la figura:



El campo de desplazamientos nodal impuesto es el siguiente:

$$\{u_{ef}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Suponer que la matriz [D] de la expresión $\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$ es

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Se pide:

1) ¿Cuál es el estado de deformación del elemento?. ¿A qué tipo de movimiento corresponde?
2) ¿Qué valor tendrá la energía de deformación elástica?. ¿Cómo es la matriz de rigidez?

$$U = \frac{1}{2}[u]^T [K][u]$$

Solución:

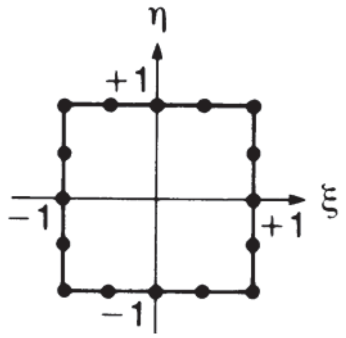
1) El estado de deformación del elemento es nulo. Se corresponde con un movimiento de sólido rígido.

$$\{\varepsilon\} = \{0 \quad 0 \quad 0\}^T$$

2) La energía almacenada será cero ya que el estado de deformación es nulo. En tal caso, la matriz de rigidez es definido positiva.

PROBLEMA 5 (2 PTOS)

Considérese el elemento cuadrilátero serendípito de 4 grado mostrado de la siguiente figura:



a) Determínense los términos del triángulo de Pascal que estarían involucrados en las funciones de forma de este elemento.
b) ¿Qué problema plantearía la utilización de este elemento?
c) ¿Qué podría hacerse para resolver dicho problema?

Solución:

Apartado a

Este elemento, por estar formado por 16 nodos incorporará 16 términos del triángulo de Pascal. Utilizaríamos los 15 primeros términos del triangulo de Pascal para completar los términos de 4º grado, y después se tendría que tomar un solo término de 5º grado. Dando lugar a las siguientes 6 posibilidades:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ \xi^5&&&&&&&& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ &\xi^4\eta&&&&&&& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ &&&\xi^3\eta^2&&&&& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ &&&&&\xi^2\eta^3&&& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ &&&&&&&\xi\eta^4& \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&\xi&&\eta&&& \\ &&\xi^2&&\xi\eta&&\eta^2&& \\ &\xi^3&&\xi^2\eta&&\xi\eta^2&&\eta^3& \\ \xi^4&&\xi^3\eta&&\xi^2\eta^2&&\xi\eta^3&&\eta^4 \\ &&&&&&&&\eta^5 \end{array}$$

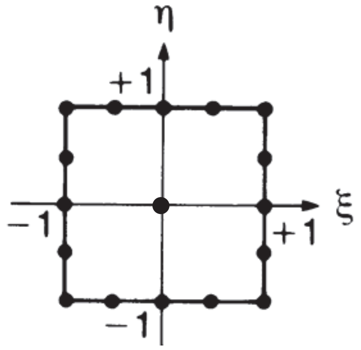
Apartado b

El problema que plantea la utilización de este elemento es que en ninguna de las anterioes configuraciones se obtiene la isotropía geométrica ya que hay 6 términos de 5º grado de los cuales solamente se puede tomar uno. Así pues con el elemento de la figura no se podría obtener la isotropía geometrica a no ser que se modificara para incorporar otro término polinómico de 5º, de marera que, en principio se podría optar por una de las 3 siguientes posibilidades:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\ \xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \\ \xi^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \eta^5 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\ \xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \\ \xi^4\eta \qquad\qquad\qquad \xi\eta^4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \xi \quad \eta \\ \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \\ \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \\ \xi^4 \quad \xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3 \quad \eta^4 \\ \xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3 \end{array}$$

Apartado c

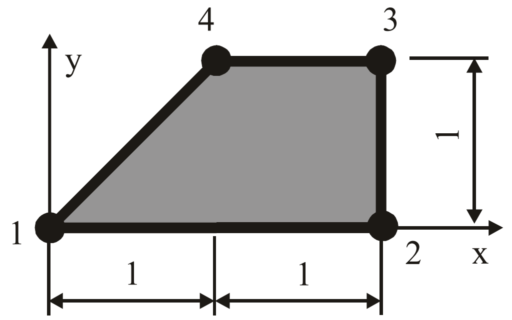
Una posible solución para incorporar un nuevo término en el triángulo de Pascal es la de introducir un nuevo nodo en el elemento. El lugar más lógico para hacer esto sería situarlo en el centro del elemento:



Otra posibilidad, mucho más elaborada es la de introducir una función de forma sin ningún nodo asociado (*nodeless shape function*). La función sería $(1-\xi^2)(1-\eta^2)$ que se anula en todos los nodos del contorno del elemento. Sin embargo no se fuerza al resto de funciones de forma a anularse ni en el centro del elemento ni en ningún otro punto concreto del elemento. En el caso del problema elástico 2D el elemento, en principio, tendría 16·2 grados de libertad asociados a los 16 nodos del contorno y 1·2 grados de libertad no asociados a ningún punto en concreto del elemento. Posteriormente, cuando se forman las matrices de elemento se procedería a eliminar las ecuaciones correspondientes a estos últimos grados de libertad mediante *condensación estática*. La *condensación estática* es una técnica utilizada para reducir el tamaño de las matrices de rigidez de elemento mediante la eliminación de aquellos grados de libertad cuyas funciones de forma son nulas en todos los nodos del contorno, y que por lo tanto no están asociados a grados de libertad de otros elementos. Evidentemente, esta última posibilidad esta fuera de los objetivos que se persiguen en esta asignatura y no se espera que el alumno la conozca.

PROBLEMA 7 (4 PTOS).

Determinar el vector de fuerzas equivalentes en nodos debido a la acción de la gravedad del elemento mostrado en la siguiente figura:



Datos

Espesor = e

Densidad = ρ

$$\{f_b^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV$$

En la integración considerar integración numérica con un punto de Gauss.

Tabla 1.- Puntos de integración y pesos de la Cuadratura de Gauss

n	±□i	Hi
1	0.0	2.000 000 000 000 000
2	±0.577 350 269 189 626	1.000 000 000 000 000
3	±0.774 596 669 241 483 0.000 000 000 000 000	0.555 555 555 555 556 0.888 888 888 888 889
4	±0.861 136 311 594 953 ±0.339 981 043 584 856	0.347 854 845 137 454 0.652 145 154 862 546

Solución:

Para evaluar el vector de fuerzas equivalentes en nodos se utilizarán coordenadas normalizadas:

$$\{f_b^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV = e \int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1} [N(\xi,\eta)]^T \{b\} \det[J(\xi,\eta)] d\xi d\eta$$

Se han de determinar las expresiones que definen {b}, [N(ξ,η)] y det[J(ξ,η)].

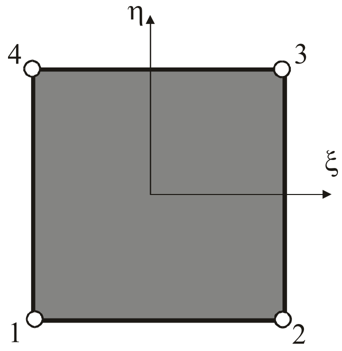
Cálculo del vector de fuerzas por unidad de volumen {b}

Este vector es debido a la acción de la gravedad, que por lo tanto será:

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de funciones de forma [N(ξ,η)]

Las funciones de forma del elemento cuadrilátero lineal en coordenadas normalizadas son:



$$N_1 = (1-\eta)(1-\xi)/4$$
$$N_2 = (1-\eta)(1+\xi)/4$$
$$N_3 = (1+\eta)(1+\xi)/4$$
$$N_4 = (1+\eta)(1-\xi)/4$$

$$[N]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Cálculo del Jacobiano det[J(ξ,η)]

La expresión de la matriz Jacobiana asociada a la transformación de coordenadas es:

$$[J]=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Utilizando elementos isoparamétricos la coordenada global x vendrá dada por:

$$x=\sum N_i(\xi,\eta)\,x_i$$

por lo tanto el primer término de la matriz Jacobiana será:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\sum \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i$$

De manera similar se determinarían los cuatro términos de la matriz Jacobiana.

Para evaluar la matriz se han de calcular las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales:

$$\frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \xi}=+\frac{1}{4}(1-\eta) \qquad \frac{\partial N_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}=-\frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \xi}=+\frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}=+\frac{1}{4}(1+\xi)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi,\eta)}{\partial \xi}=-\frac{1}{4}(1+\eta) \qquad \frac{\partial N_4(\xi,\eta)}{\partial \eta}=+\frac{1}{4}(1-\xi)$$

Integración numérica.

Desarrollemos primero la integral a evaluar

$$\left\{f_b^e\right\}=e\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1}[N(\xi,\eta)]^T\{b\}\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta = e\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1}\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \vdots & \vdots \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix}\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta$$

$$= -\rho g e\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ \vdots \\ 0 \\ N_4 \end{bmatrix}\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta \qquad = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{y1} \\ \vdots \\ 0 \\ f_{y4} \end{bmatrix}$$

Las integrales a evaluar para calcular el vector de fuerzas equivalentes en nodos son del tipo:

$$f_{yi} = -\rho g e\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1} N_i(\xi,\eta)\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta$$

Para evaluar las integrales se procede a utilizar integración numérica utilizando la regla de Cuadratura de Gauss con 1 punto de integración, por tanto las integrales a determinar se calculará como:

$$f_{yi} = -\rho g e\int_{-1}^{-1}\int_{-1}^{-1} N_i(\xi,\eta)\det[J(\xi,\eta)]d\xi d\eta \approx -\rho g e\sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{1} N_i(\xi_j,\eta_k)\det[J(\xi_j,\eta_k)]H_j H_k$$

$$= -\rho g e N_i(0,0)\det[J(0,0)]\cdot 2\cdot 2$$

Por tanto, para el cálculo final se han de determinar las funciones de forma y la matriz Jacobiana en el punto de coordenadas (0,0):

i	$N_i(0,0)$	$\frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \eta}$	x_i	y_i
1	+1/4	–1/4	–1/4	0	0
2	+1/4	+1/4	–1/4	2	0
3	+1/4	+1/4	+1/4	2	1
4	+1/4	–1/4	+1/4	1	1

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|_{0,0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \xi} x_i = -\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{0,0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \xi} y_i = -\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1 = 0$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{0,0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \eta} x_i = -\frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|_{0,0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial N_i(0,0)}{\partial \eta} y_i = -\frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow |J(0,0)| = \begin{vmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/4 & 2/4 \end{vmatrix} = \frac{3}{8}$$

Puesto que todas las funciones de forma valen 1/4 en el punto de integración se tendrá:

$$f_{yi} = -\rho g e N_i(0,0) \det[J(0,0)] \cdot 2 \cdot 2 = -\rho g e \cdot \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot 4 = \frac{-3}{8}\rho g e$$

Por lo tanto el vector de fuerzas equivalentes en nodos será:

$$\boxed{\left\{f_b^e\right\} = \frac{-3}{8}\rho g e \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$