MÉTODOS NUMÉRICOS

SEGUNDA PRÁCTICA

1.- Introducción

En esta segunda práctica se va a resolver mediante elementos finitos el problema del flujo ideal irrotacional para dominios bidimensionales utilizando elementos triangulares lineales. A continuación se resume la formulación general del problema, el planteamiento mediante elementos finitos, la aproximación de la función incógnita mediante elementos triangulares lineales (interpolación), y la implementación en MatLab.

2.- Formulación del problema del flujo ideal irrotacional.

Planteamos el problema en función de la función potencial $\phi(x,y)$. La velocidad del fluido se define como:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{1}$$

y la ecuación diferencial que gobierna el problema es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

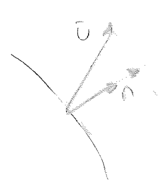
$$\text{dominio } A \in R^2 \quad ; \quad \text{frontera } S$$

Las condiciones de condiciones de contorno aplicadas sobre la frontera del dominio pueden ser de dos tipos. Valor de la función potencial especificado (condición de contorno de Dirichlet) o velocidad normal al contorno dada (condición de contorno de Neumann).

$$\begin{cases} \phi = \tilde{\phi} & \text{en } S_1 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} n_y = q & \text{en } S_2 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \phi = \tilde{\phi} & \text{en } S_1 \\ V_x n_x + V_y n_y = V_n = q & \text{en } S_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$S_1 \cap S_2 = \varnothing \quad ; \quad S_1 \cup S_2 = S$$

$V_x N_x + V_b N_b = q$



Como ejemplo concreto a resolver se plantea el flujo alrededor de un cilindro, tal como se esquematiza en la figura 1.

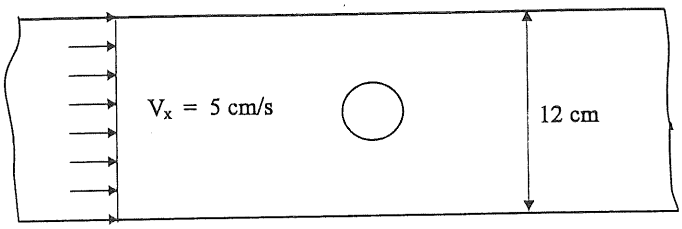


Figura 1.- Ejemplo de aplicación.

Por consideraciones de simetría, solo hay que analizar una cuarta parte del problema. Las condiciones de contorno son: velocidad del fluido perpendicular al contorno conocidas (nula en paredes del recinto y valor especificado en la sección de entrada); en la sección de salida, la velocidad del fluido tangencial al contorno (por simetría) debe ser nula, con lo que el potencial debe ser constante en esta sección (se establece un valor arbitrario de 50, como origen de potenciales).

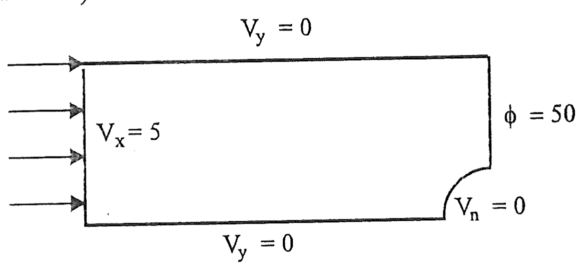


Figura 2.- Condiciones de contorno del problema.

3.- *Planteamiento general mediante elementos finitos.*

Se resume a continuación la formulación general del problema mediante elementos finitos, a partir de lo descrito en las clases teóricas. En esta formulación se considera la utilización de un elemento finito genérico, definiendo por $\{\phi^e\}$ el vector de función potencial en nodos y por $[N]^T$ la matriz de funciones de forma de dicho elemento.

Definiciones:

$$[L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad ; \quad [D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = [L][N] \tag{4}$$

Matriz de rigidez:

$$\left.\begin{aligned}\left[k_1^e\right] &= -\int_{A^e}\left([B]^T\ [D]\ [B] \right) dA \\ \left[k_2^e\right] &= [0] \quad \text{ya q' depende de } \sigma = 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left[k^e\right] = -\int_{A^e}\left([B]^T\ [D]\ [B] \right) dA \tag{5}$$

Vector $\{f^e\}$:

$$\left.\begin{aligned}\left\{f_3^e\right\} &= \{0\} \quad \text{depende } Q=0 \\ \left\{f_4^e\right\} &= \int_{S_2 \cap S^e} q\,[N]^T\, dS\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{f_e\right\} = \int_{S_2 \cap S^e} q\,[N]^T\, dS \tag{6}$$

Calculo de velocidades:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \phi = [L]\phi = [L][N]\left\{\phi^e\right\} = [B]\left\{\phi^e\right\} \tag{7}$$

4.- Utilización del elemento triangular lineal.

Interpolación polinómica lineal:

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \tag{8}$$

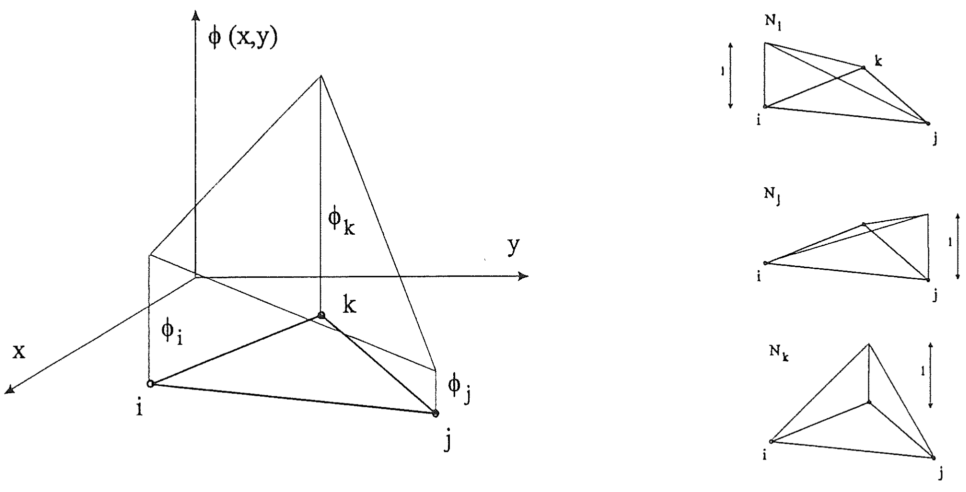


Figura 3.- Elemento triangular lineal.

Expresión matricial de la interpolación:

$$\phi(x,y) = N_i(x,y)\phi_i + N_j(x,y)\phi_j + N_k(x,y)\phi_k =$$

$$= [N(x,y)]\{\phi^e\} = \left(N_i(x,y) \;\; N_j(x,y) \;\; N_k(x,y)\right)\begin{Bmatrix}\phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k\end{Bmatrix} \tag{9}$$

$$\text{con:}\quad \left|\begin{array}{l} N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta^e \\ N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta^e \\ N_k = (a_k + b_k x + c_k y)/2\Delta^e \end{array}\right. \tag{10}$$

i j k

$$\text{con:}\quad \left|\begin{array}{l} \Delta^e = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k\end{vmatrix} = \text{Area del triangulo ijk} \\ a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{array}\right. \tag{11}$$

a

$b_j = y_k - y_i$ $\quad b_k = y_i - y_j$

$c_j = x_i - x_k$ $\quad c_k = x_j - x_i$

Matriz de rigidez:

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\left(N_i \; N_j \; N_k\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y}\end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e}\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k\end{bmatrix} \tag{12}$$

La matriz [B] es en este caso constante. Esto es debido a que la interpolación es lineal y el operador [L] contiene primeras derivadas. De esta forma:

$$[k^e] = -\int_{A^e}\left([B]^T\;[D]\;[B]\right)dA = -[B]^T\;[D]\;[B]\;\Delta^e \tag{13}$$

Vector $\{f^e\}$ ***:***

- La condición de contorno correspondiente es que $V_n = q$, en el contorno del elemento que define S_2. Para la aplicación que estamos considerando q es constante.

$$\{f^e\} = \int_{S_2\cap S^e} q[N]^T dS = q\int_{S_2\cap S^e}[N]^T dS = q\int_{S_2\cap S^e}\begin{Bmatrix}N_i \\ N_j \\ N_k\end{Bmatrix}dS \tag{14}$$

- Supongamos que el contorno del elemento que define S_2 es el correspondiente a un lado cualquiera, por ejemplo el definido por los nodos i y j. En este lado las funciones de forma N_i y N_j son lineales con S y la función de forma N_k es nula para este contorno. La función de forma N_i toma valor unidad en el nodo i y cero en el j. De esta forma:

$$\{f^e\}_{ij} = q \int_{ij} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS = q \begin{Bmatrix} L_{ij}/2 \\ L_{ij}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Matrices globales:

Ensamblando las matrices y vectores de elemento se plantea el sistema global de ecuaciones. Posteriormente se aplican las condiciones de contorno en valor potencial en nodos y se resuelve el sistema de ecuaciones.

Cálculo de velocidades:

Calculado el vector global de función potencial en nodos, la velocidad en cada elemento se calcula como:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = [B]\{\phi^e\} \tag{16}$$

Como la matriz [B] para el elemento triangular lineal es constante, la velocidad obtenida del fluido será constante dentro de cada elemento.

La velocidad en los nodos se puede calcular simplemente promediando el valor de la velocidad de los elementos que inciden en cada nodo.

5.- Implementación en MatLab.

En este apartado se describe la implementación en MatLab de la formulación de elementos finitos para el elemento triangular lineal. El objetivo es mostrar la secuencia de operaciones necesarias para resolver el problema y poder estudiar las características de la solución.

5.1.- Ficheros de entrada

Los datos necesarios para definir el problema están contenidos en cuatro ficheros.

- Fichero 'xy':

  Coordenadas de nodos (ordenado según número de nodo).

- Fichero 'top':

  Definición de elementos por números de nodos que conecta en sentido antihorario (ordenado según número de elemento)

- Fichero 'rest.:

  Definición de condiciones de contorno de la función potencial en nodos (números de nodo y valor de la función potencial en el nodo)

- Fichero 'cargasl':

  Definición de condiciones de contorno en velocidad normal al contorno del elemento (definición de lados por sus dos nodos y velocidad correspondiente)

En la figura 4 se muestra la malla de elementos finitos y en la Tabla I el contenido de los diferentes ficheros para este ejemplo.

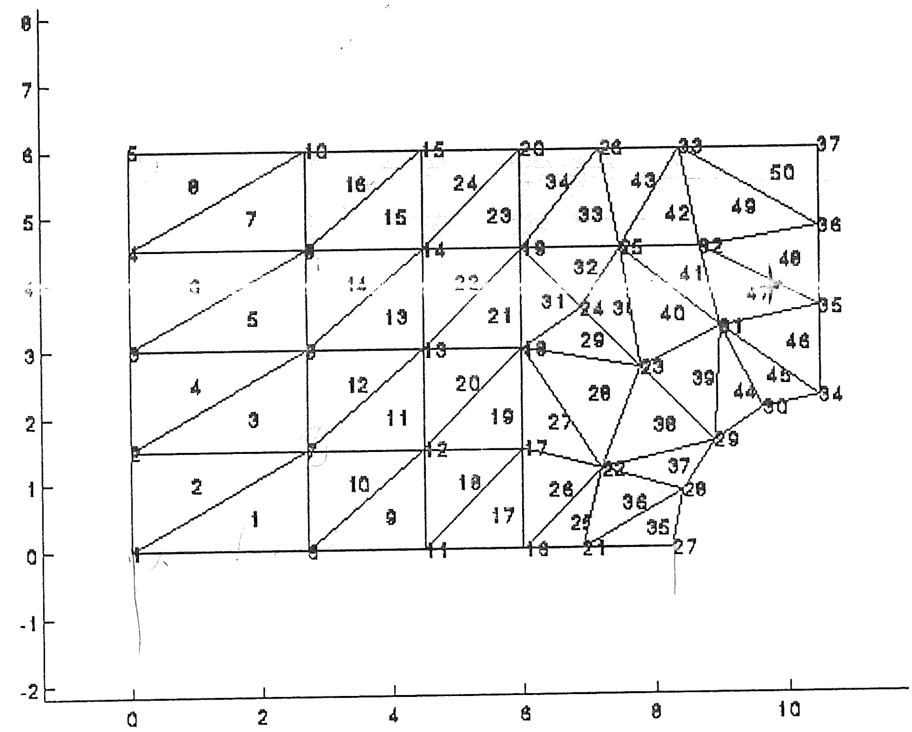
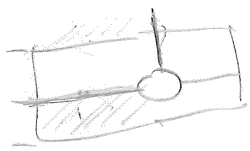


Figura 4.- Modelo de elementos finitos.



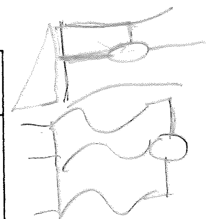


Tabla I : Ficheros de definición del problema

XY — n° coord nodal

n°		
1.	0.0	0.0
2.	0.0	1.5
3.	0.0	3.0
4.	0.0	4.5
5.	0.0	6.0
6.	2.7	0.0
7.	2.7	1.5
8.	2.7	3.0
9.	2.7	4.5
10.	2.7	6.0
11.	4.5	0.0
12.	4.5	1.5
13.	4.5	3.0
14.	4.5	4.5
15.	4.5	6.0
16.	6.0	0.0
17.	6.0	1.5
18.	6.0	3.0
19.	6.0	4.5
20.	6.0	6.0
21.	6.9	0.0
22.	7.2	1.2
23.	7.8	2.7
24.	6.9	3.6
25.	7.5	4.5
26.	7.2	6.0
27.	8.25	0.0
28.	8.42	0.86
	...	...

TOP — n° nodos para/elem

n°			
1.	1	6	7
2.	1	7	2
3.	2	7	8
4.	2	8	3
5.	3	8	9
6.	3	9	4
7.	4	9	10
8.	4	10	5
9.	6	11	12
10.	6	12	7
11.	7	12	13
12.	7	13	8
13.	8	13	14
14.	8	14	9
15.	9	14	15
16.	9	15	10
17.	11	16	17
18.	11	17	12
19.	12	17	18
20.	12	18	13
21.	13	18	19
22.	13	19	14
23.	14	19	20
24.	14	20	15
25.	16	21	22
26.	16	22	17
27.	17	22	18
28.	22	23	18
	..	..	..

REST

n°		
1.	34	50
2.	35	50
3.	36	50
4.	37	50

CARGASL

n°			
1.	1	2	-5
2.	2	3	-5
3.	3	4	-5
4.	4	5	-5

5.2.- Programa flujo_3.m

A continuación se adjunta un listado del programa principal de elementos finitos que resuelve el problema planteado, así como de las funciones principales que utiliza este programa.

Las variables fundamentales que intervienen en este programa son:

Definición del modelo de elementos finitos.

XY	:	Matriz de coordenadas nodales.
Top	:	Matriz de definición de elementos.
CargasL	:	Definición de condiciones de contorno de velocidad normal a lados de elementos finitos.
Rest	:	Matriz de definición de condiciones de contorno de función potencial en nodos.
D	:	Matriz [D]

Parámetros del problema.

N	:	Número de nodos.
Nel	:	Número de elementos.
NNpe	:	Número de nodos por elemento (debe ser 3).
NR	:	Número de nodos con condición de contorno en potencial.
NCl	:	Número de lados de elemento con condición de contorno en velocidad.

Cálculo de matrices de rigidez de elemento y ensamblado.

K	:	Matriz de rigidez global para todos los nodos.
DB	:	Matriz [D]*[B] para todos los elementos. $[DB] = [\ DB^1\ \ DB^2\ \ DB^3 \ldots.\ ]$.

Cálculo de vectores f^e y ensamblado.

F	:	Vector F para todos los nodos.

Resolución del sistema de ecuaciones.

Sol	:	Vector de solución del problema para la función potencial.

Cálculo de velocidades en elementos y nodos (promediado).

V	:	Matriz de velocidades de todos los elementos. Componentes x e y.
VN	:	Matriz de velocidades de todos los nodos. Componentes x e y.
VT	:	Vector de módulo de velocidad de todos los nodos.