UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y APLICACIONES

TEMA 4.- INTERPOLACIÓN. FUNCIONES DE FORMA DE CONTINUIDAD C^0

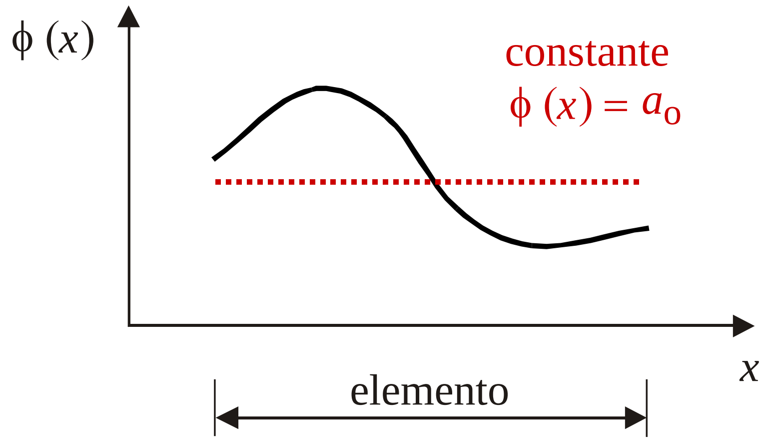
Escuela de Ingeniería Mecánica
Universidad Industrial de Santander

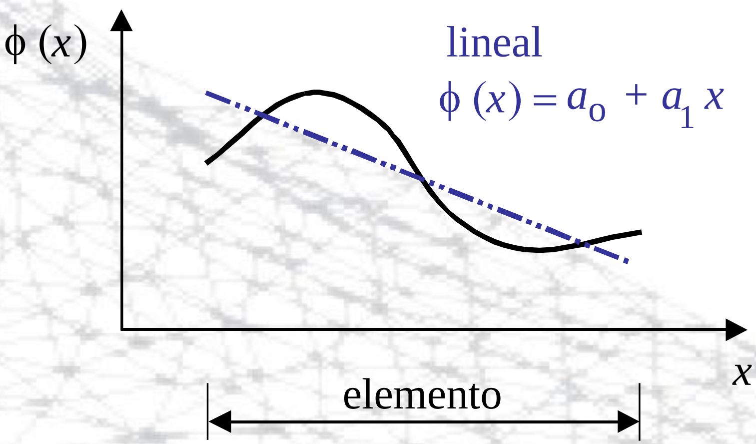
ÍNDICE

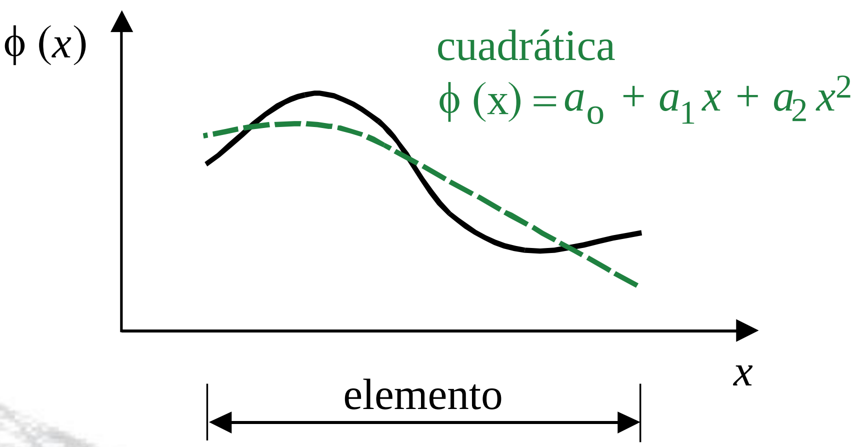
ÍNDICE

1.- Introducción

Interpolación polinómica unidimensional



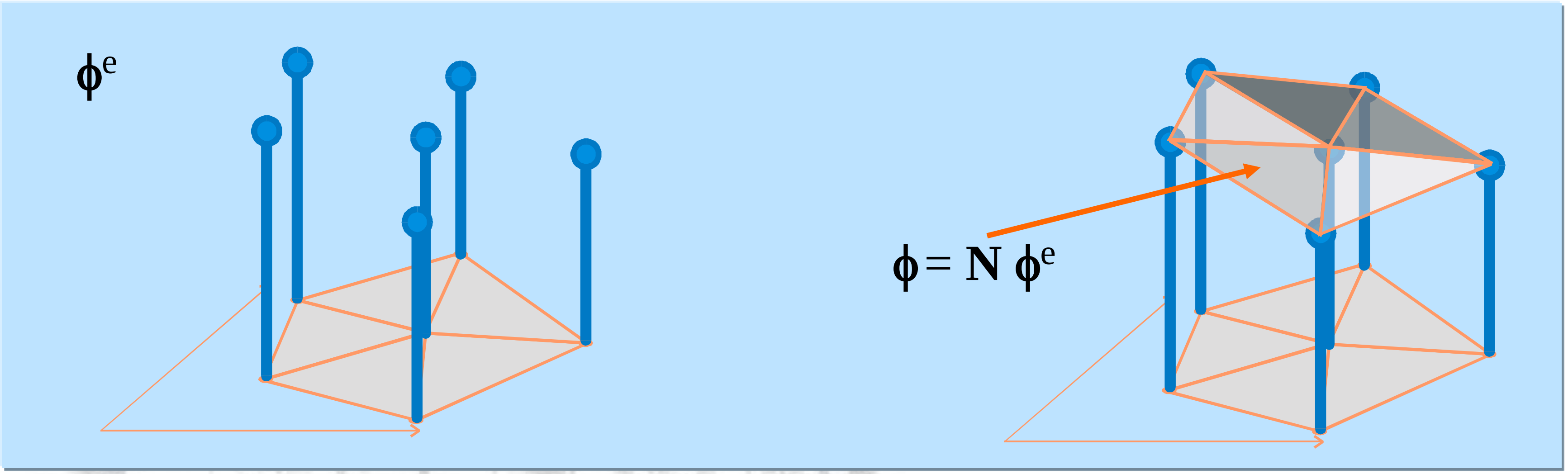




1.- Introducción

INTERPOLACIÓN DE FUNCIONES EN EL **MEF**:

- Interpolación a tramos (dentro de cada elemento)
- G.D.L = variables nodales (con elementos convencionales)
- Interpolación polinómica (en general)
- Aumento grado polinómico ➔ Aumento de precisión
- Formulación sencilla (derivación, integración, etc)



1.- Introducción

Interpolación mediante funciones de forma

$$\phi(x,y,z) \approx \sum N_i(x,y,z) a_i = \mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{a}^e$$

- E.F convencionales: Grados de libertad = Variables nodales

$$\phi(x,y,z) \approx \sum N_i(x,y,z)\phi_i = \mathbf{N}(x,y,z)\boldsymbol{\phi}^e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi(x,y,z) \approx \mathbf{N}\boldsymbol{\phi}^e}$$

- E.F. jerárquicos: Grados de libertad $\neq$ Variables nodales

Funciones de forma no arbitrarias. Requisitos:

- grado polinómico mínimo
- completitud
- continuidad

1.- Introducción

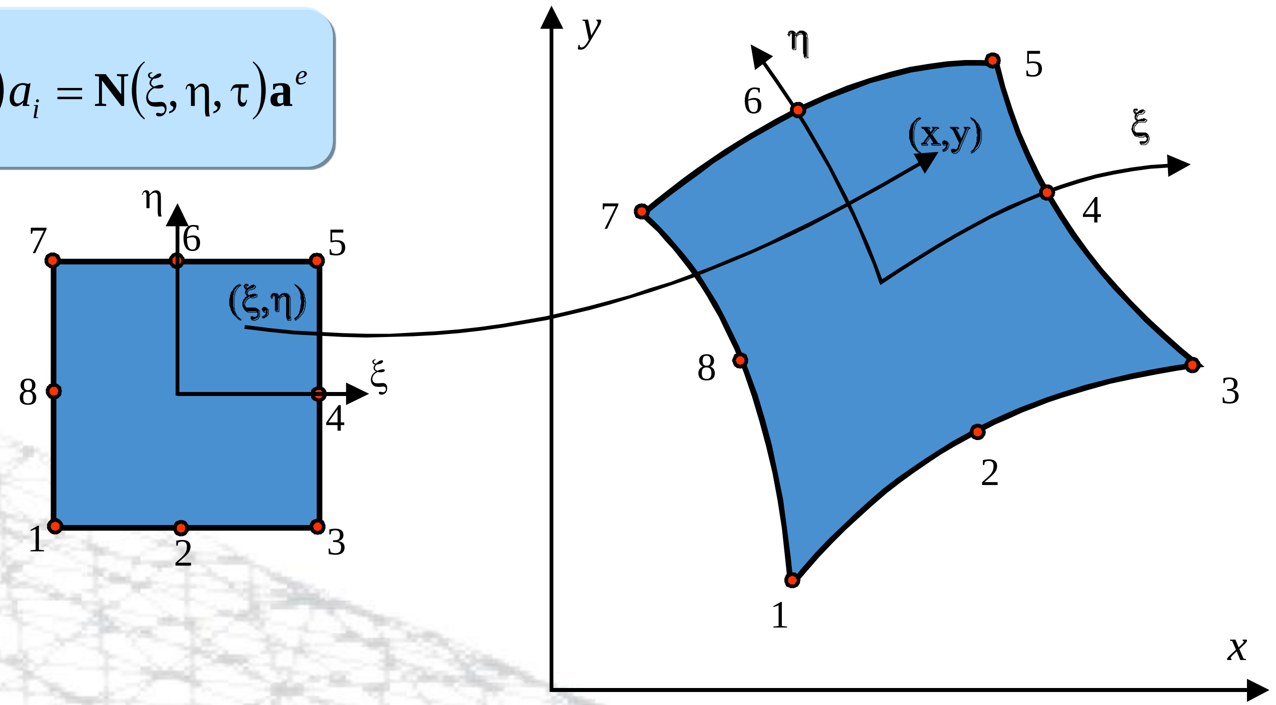
Planteamiento de las funciones de interpolación

- Coordenadas Globales
- Coordenadas Locales

Se cumplen los requisitos para asegurar convergencia

$$\phi(\xi,\eta,\tau) \approx \sum N_i(\xi,\eta,\tau)a_i = \mathbf{N}(\xi,\eta,\tau)\mathbf{a}^e$$

$$x = x(\xi,\eta,\tau)$$
$$y = y(\xi,\eta,\tau)$$
$$z = z(\xi,\eta,\tau)$$



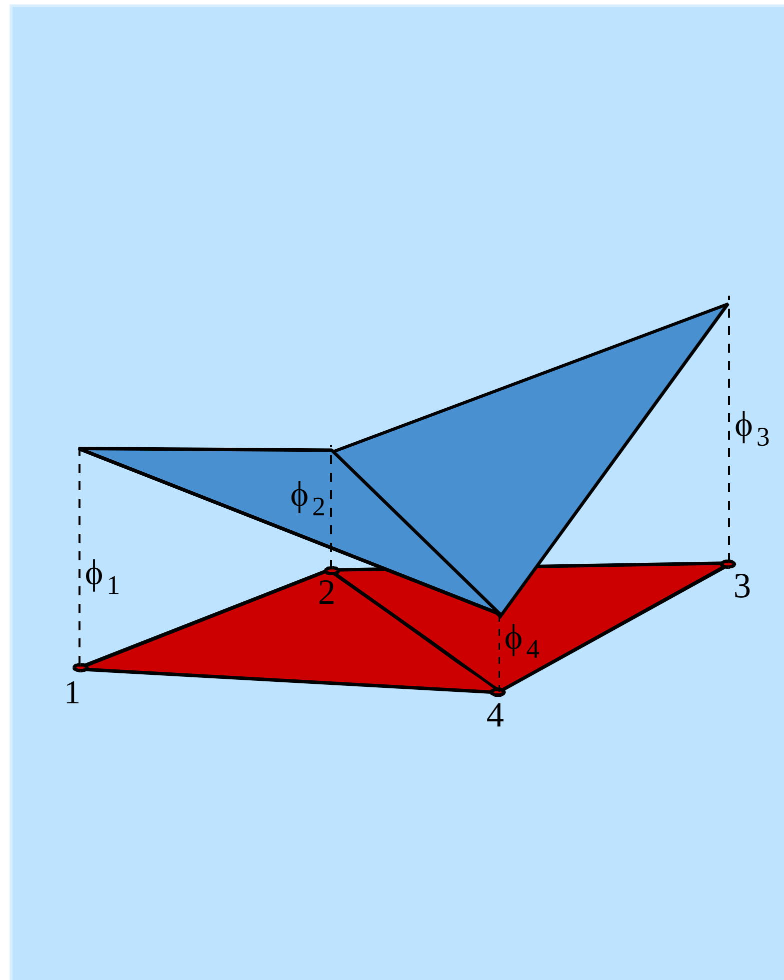
1.- Introducción

1.1.- Requisistos de interpolación

- Continuidad C^0
- Inclusión de términos
  constante (mov. cuerpo rígido)
  y lineales (deform. constante)
- Isotropía geométrica
- Uso de polinomios completos
  error = f (orden polinomio completo)

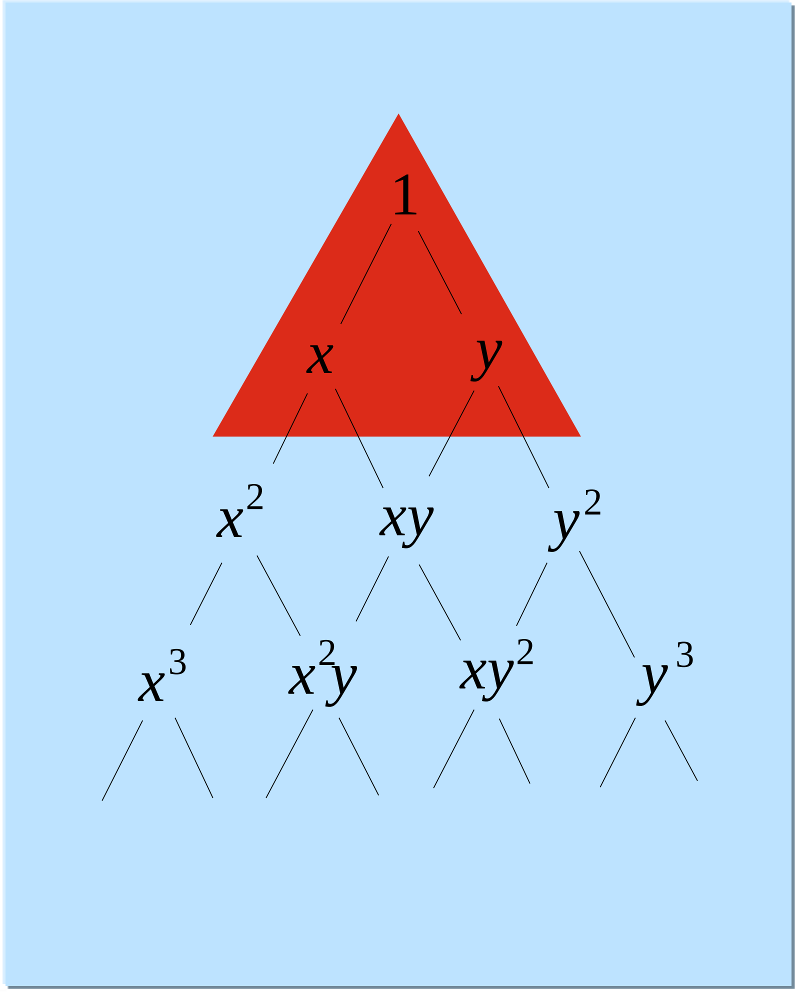
1.- Introducción 1.1.- Requisistos de interpolación

- Continuidad C^0
- Inclusión de términos constante (mov. cuerpo rígido) y lineales (deform. constante)
- Isotropía geométrica
- Uso de polinomios completos error = f (orden polinomio completo)



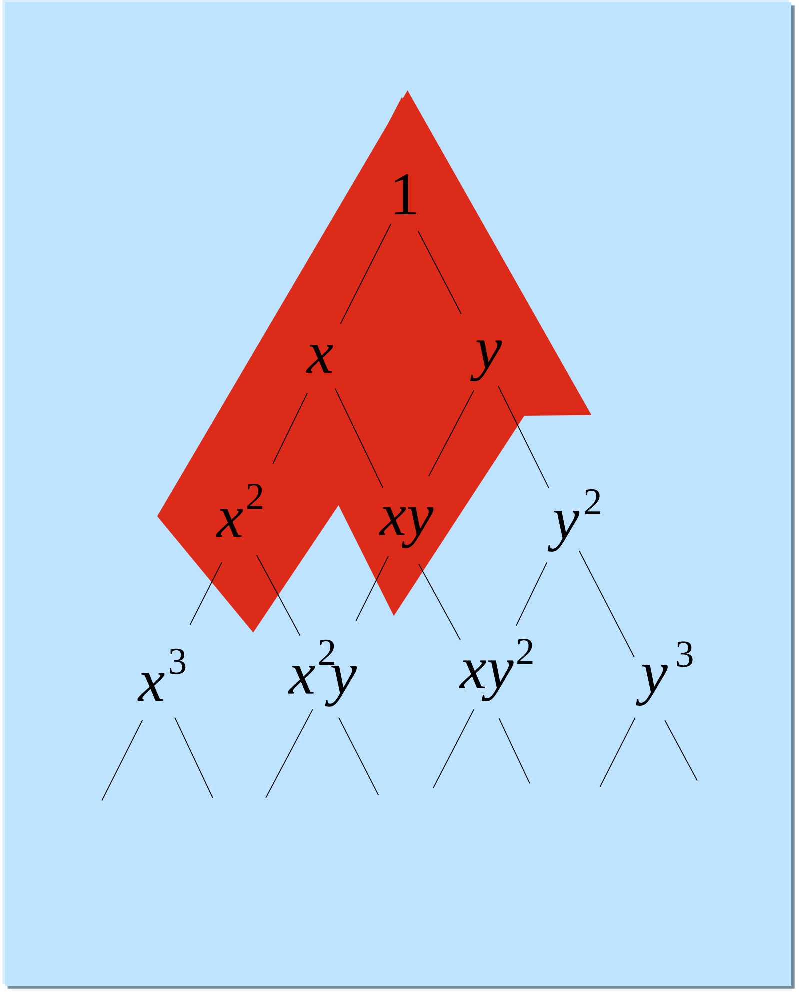
1.- Introducción 1.1.- Requisistos de interpolación

- Continuidad C^0
- Inclusión de términos constante (mov. cuerpo rígido) y lineales (deform. constante)
- Isotropía geométrica
- Uso de polinomios completos
  error = f (orden polinomio completo)



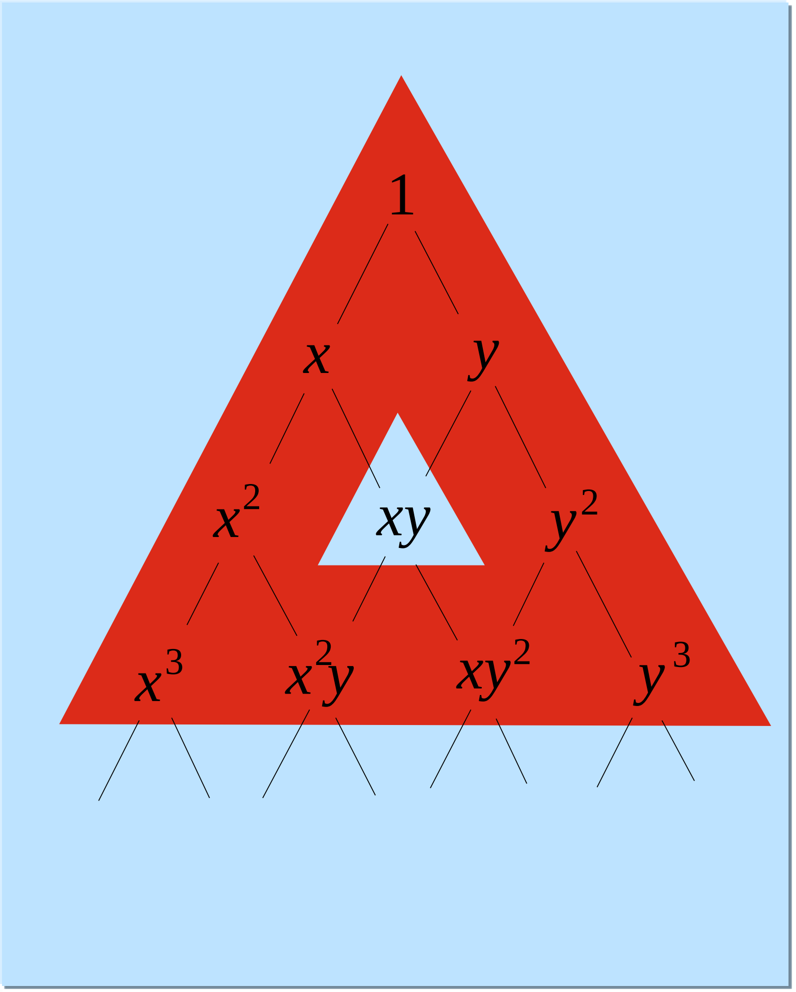
1.- Introducción 1.1.- Requisistos de interpolación

- Continuidad C^0
- Inclusión de términos constante (mov. cuerpo rígido) y lineales (deform. constante)
- Isotropía geométrica
- Uso de polinomios completos error = f (orden polinomio completo)



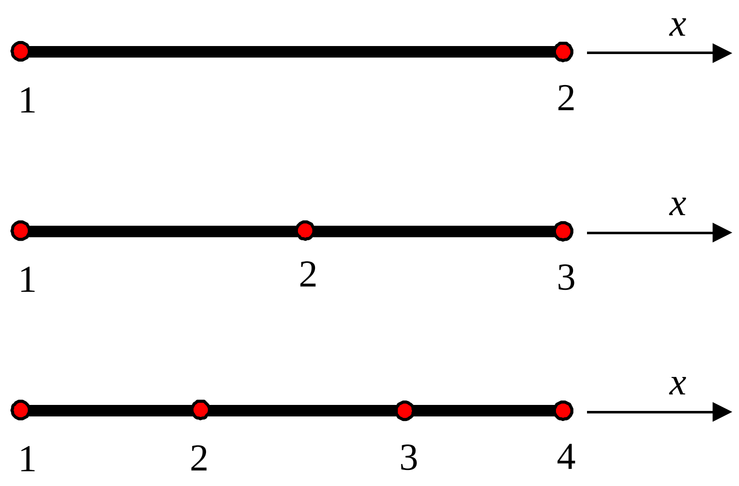
1.- Introducción 1.1.- Requisistos de interpolación

- Continuidad C^0
- Inclusión de términos constante (mov. cuerpo rígido) y lineales (deform. constante)
- Isotropía geométrica
- Uso de polinomios completos error = f (orden polinomio completo)

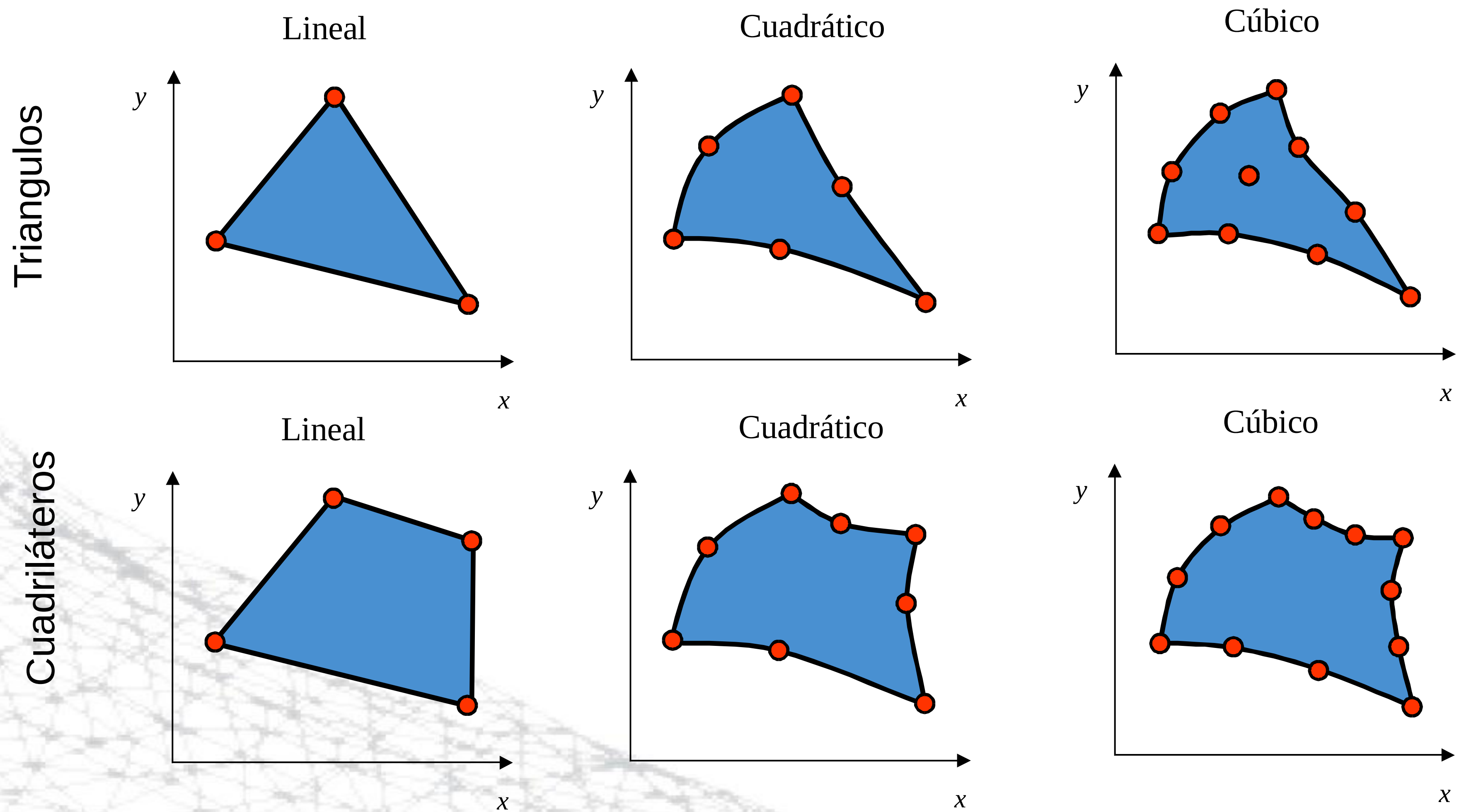


ÍNDICE

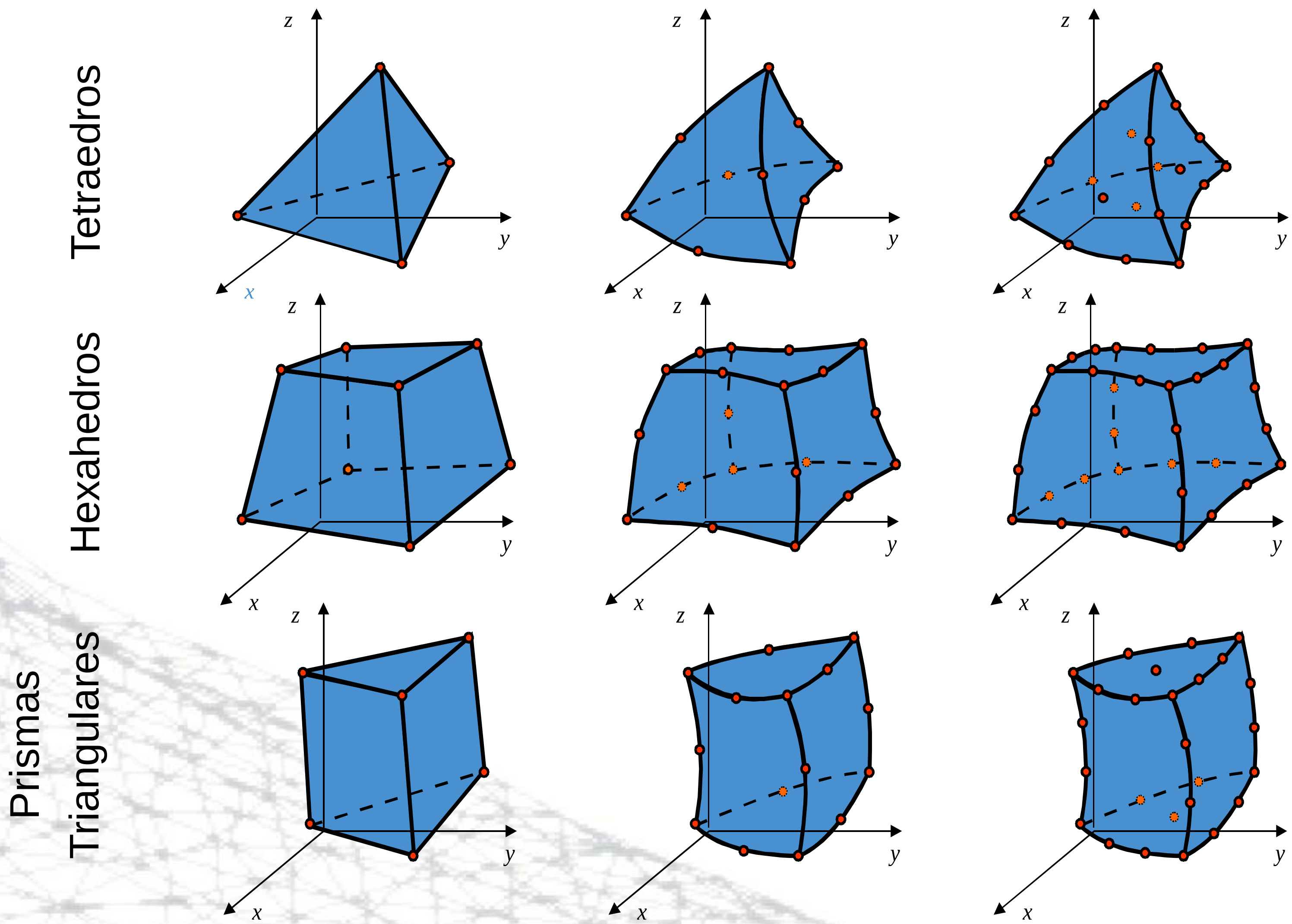
2.- Formas básicas de elementos. Clasificación 2.1.- Elm 1D



2.- Formas básicas de elementos. Clasificación 2.1.- Elm 2D

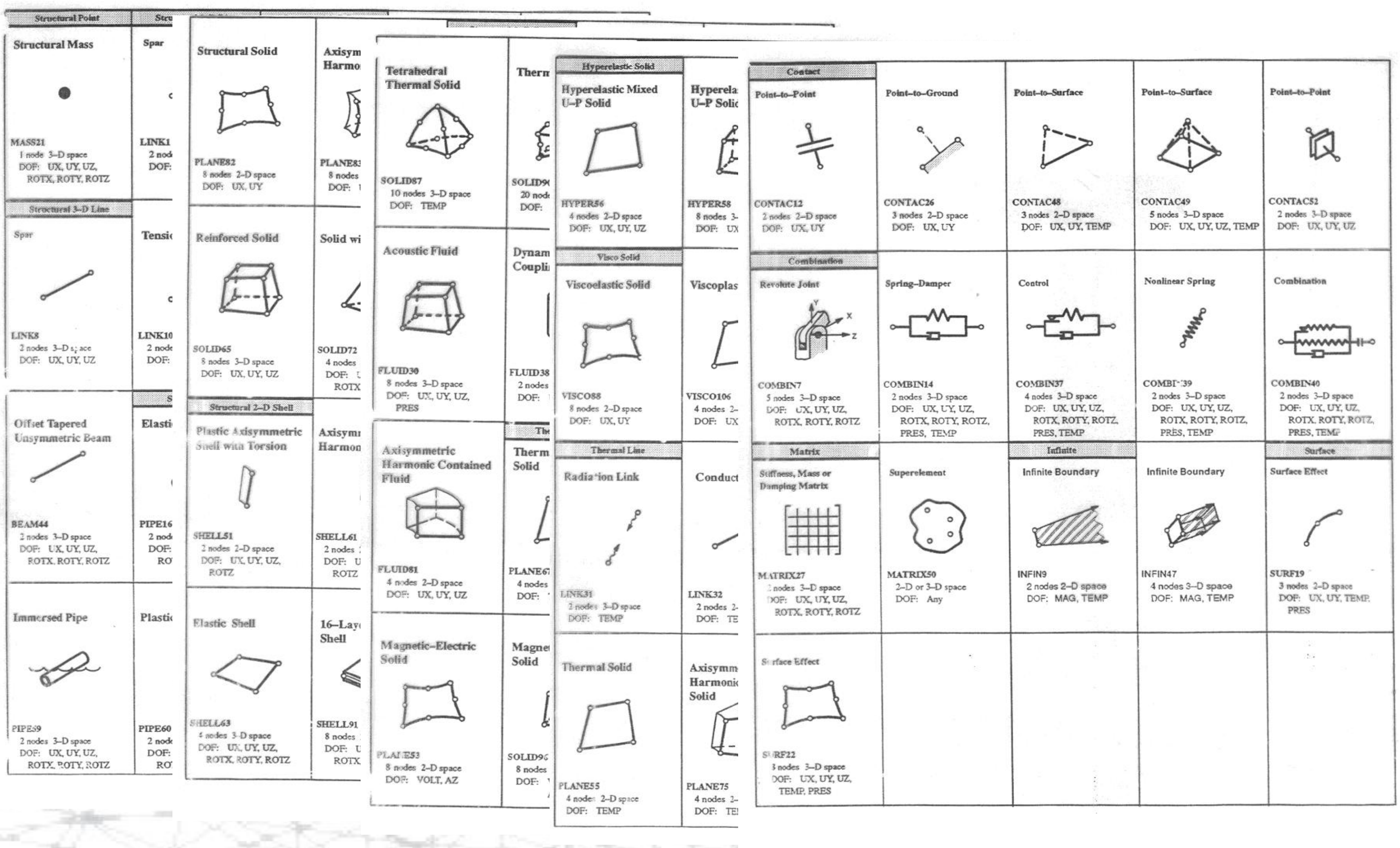


2.- Formas básicas de elementos. Clasificación 2.1.- Elm 3D



2.- Formas básicas de elementos. Clasificación

Librería de elementos de Ansys



ÍNDICE

3.- Interpolación Nodal. Funciones de forma

$$\phi(x,y,z)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\ldots+\alpha_n x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

$$\phi_1=\phi(x_1,y_1,z_1)\quad,\qquad,\quad \phi_q=\phi(x_q,y_q,z_q)$$

$$\phi(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & x & y & \ldots & x^\alpha y^\beta z^\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \ldots\\ \phi_q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1 & \ldots & \ldots\\ 1 & x_2 & y_2 & \ldots & \ldots\\ 1 & x_3 & y_3 & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & x_q & y_q & \ldots & \ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\phi(x,y,z)=\mathbf{p}^T\boldsymbol{\alpha}$$

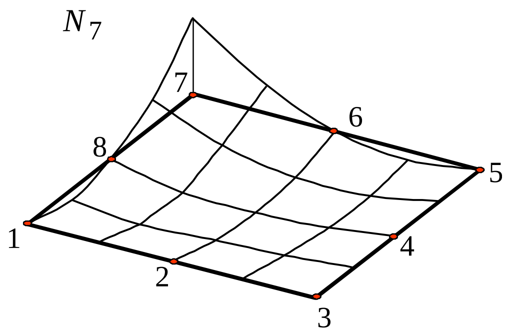
$$\boldsymbol{\phi}^e=\mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\phi}^e$$

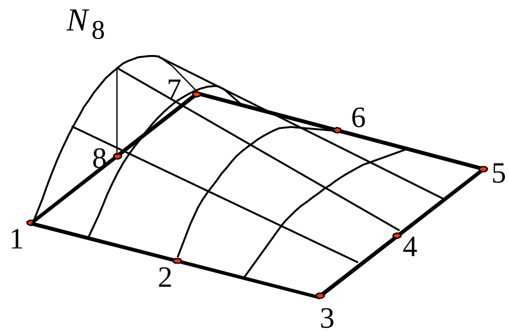
$$\phi(x,y,z)=\mathbf{p}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\phi}^e\qquad\qquad\phi(x,y,z)=\mathbf{N}\boldsymbol{\phi}^e$$

ÍNDICE

4.- Propiedades de las funciones de forma

1 De la definición de funciones de forma: $\phi(x,y,z)=\mathbf{N}\boldsymbol{\phi}^e$ ➡ $N_j(x_i,y_i,z_i)=\begin{cases}1 & si \quad i=j\\ 0 & si \quad i\neq j\end{cases}$





2 $\sum_{i=1}^{Nf} N_i(x,y,z)=1$

Dem:

$$f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{Nf} N_i(x,y,z)\cdot f(x_i,y_i,z_i)$$

$f(x,y,z)=k$ → $k=\sum_{i=1}^{Nf} N_i(x,y,z)\cdot k$

$$k=k\sum_{i=1}^{Nf} N_i(x,y,z)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{Nf} N_i(x,y,z)=1}$$

ÍNDICE

5.- Elementos uni-dimensionales

Funciones de forma = Polinomios de Lagrange

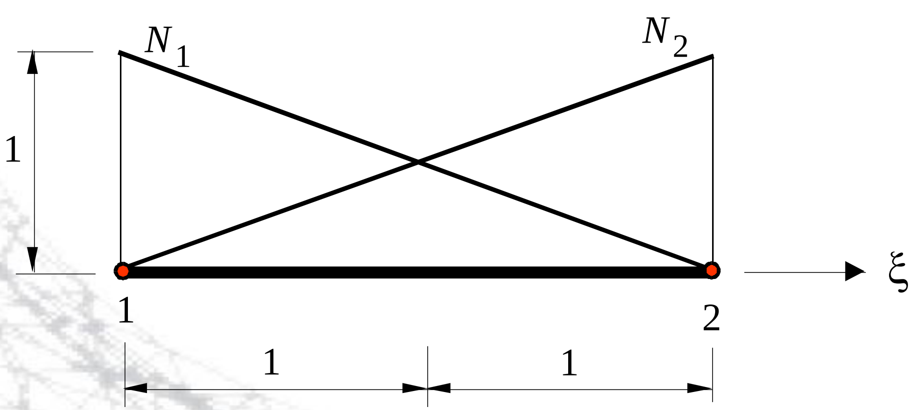
$$l_I^{q-1}(x_1) = \frac{\cancelto{0}{(x_1 - x_1)}\ldots(x_1 - x_{I-1})(x_1 - x_{I+1})\ldots(x_1 - x_q)}{(x_I - x_1)\ldots(x_I - x_{I-1})(x_I - x_{I+1})\ldots(x_I - x_q)} = 0$$

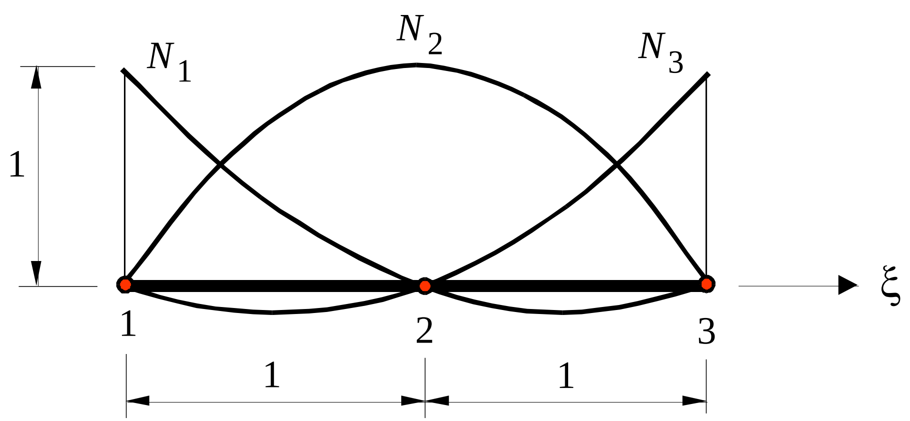
5.- Elementos uni-dimensionales

Funciones de forma = Polinomios de Lagrange

$$\boxed{l_I^{q-1}(x_I)} = \frac{(x_I - x_1)\dots(x_I - x_{I-1})(x_I - x_{I+1})\dots(x_I - x_q)}{(x_I - x_1)\dots(x_I - x_{I-1})(x_I - x_{I+1})\dots(x_I - x_q)} \equiv \boxed{1}$$

$$l_I^{q-1}(x) \equiv N_I(x)$$





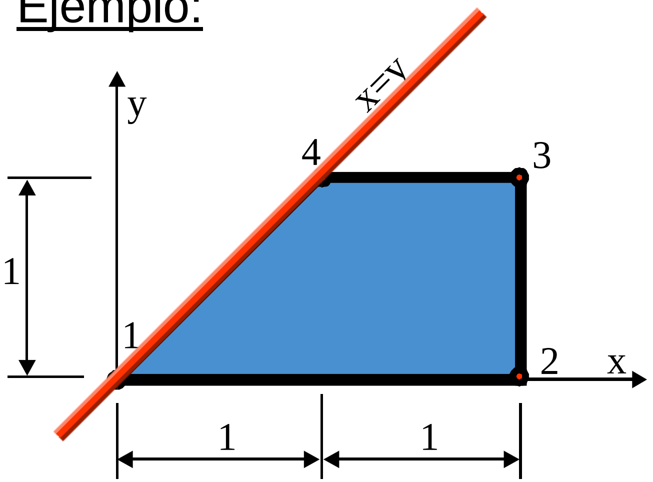
$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$
$$N_2(\xi) = 1-\xi^2$$
$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

ÍNDICE

6.- Elementos bi-dimensionales 6.1.- Coord. globales

Ejemplo:



Polinomio de interpolación:

$$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$

Funciones de forma:

$$N_1(x,y) = 1 - \frac{x}{2} - y + \frac{xy}{2} \qquad N_2(x,y) = \frac{1}{2}(x - xy)$$

$$N_3(x,y) = -y + xy \qquad N_4(x,y) = 2y - xy$$

En x=y:

$$u(x,x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{2} + (2u_4 - u_3 - u_1)x + \left(u_3 - u_4 - \frac{u_2 - u_1}{2}\right)x^2$$

Cuadrática

Depende de valores de nodos fuera del lado

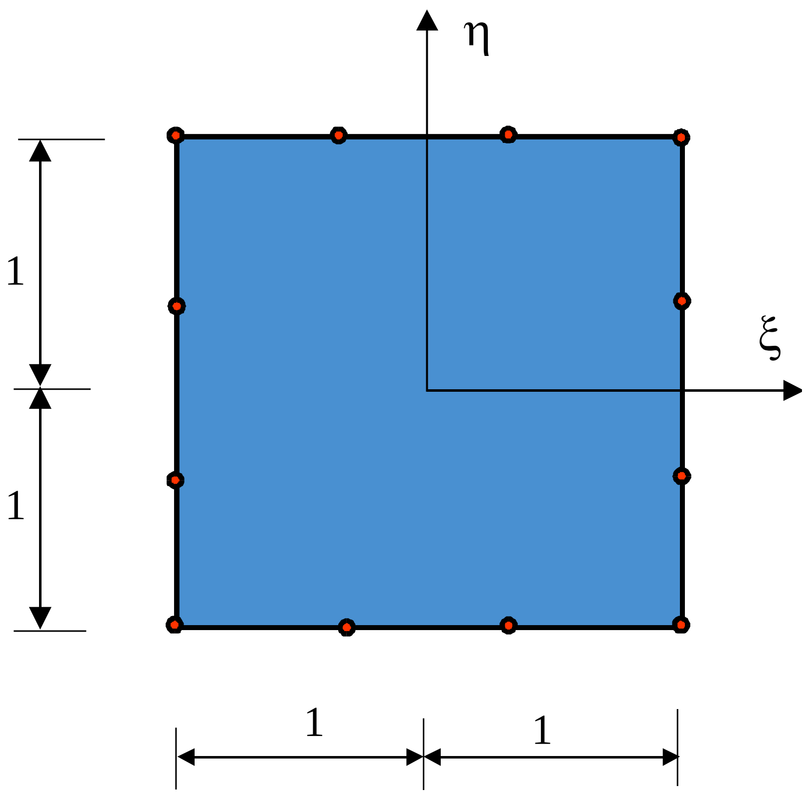
Coordenadas globales:

- No garantía de continuidad C^0
- Cont. C^0 solo en triángulos y tetraedros
- Límites de integración complejos

$\Rightarrow$ **Se usarán func. de forma en coord. locales**

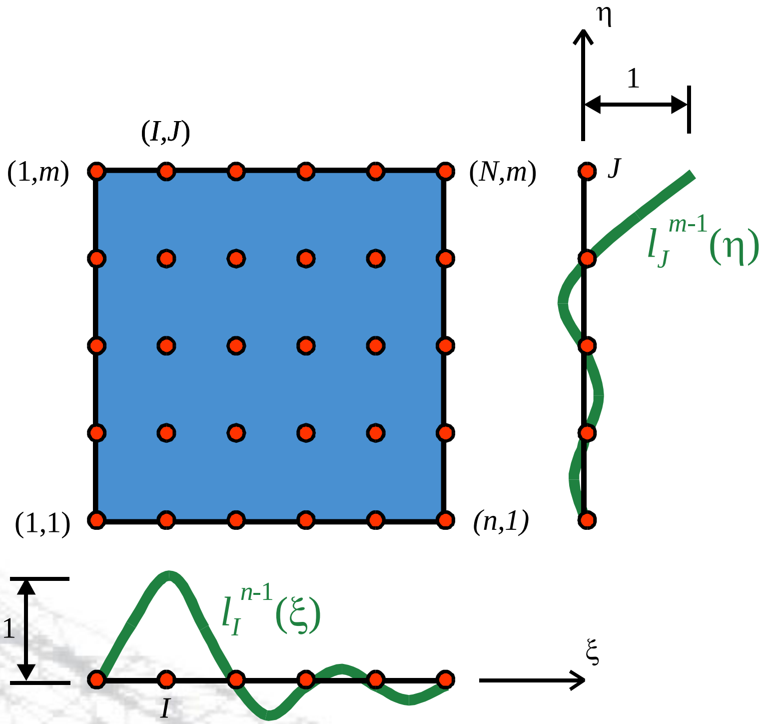
6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

Elemento de referencia y coordenadas normalizadas

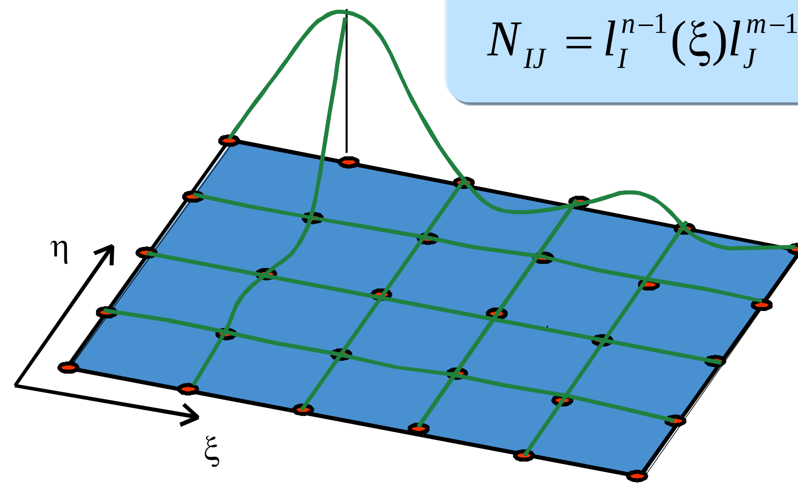


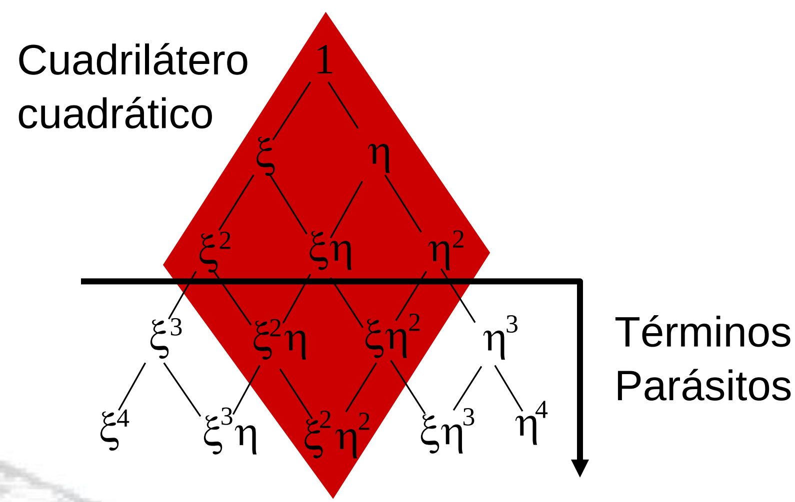
6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

6.2.1.- Elementos Lagrangianos



$$N_{IJ} = l_I^{n-1}(\xi)\, l_J^{m-1}(\eta)$$



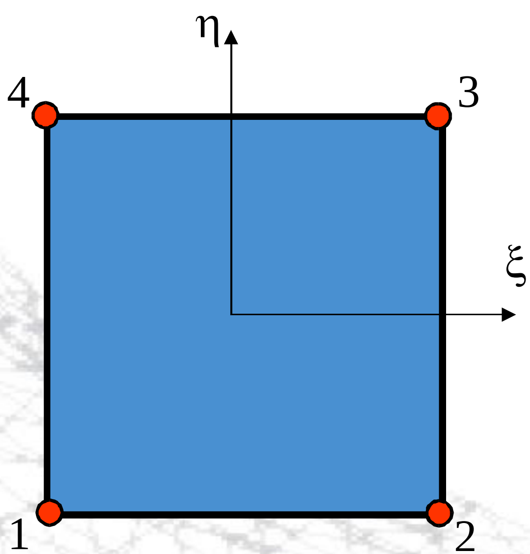


- Func. de Forma fáciles de formular
- Contienen términos de muy alto grado (son poco eficaces)

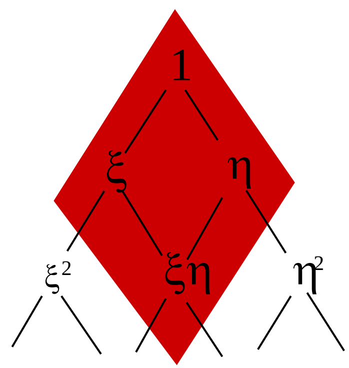
6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

6.2.2.- Elementos Serendípitos

- Se sitúan nodos solo en el contorno
- Se añaden los nodos interiores necesarios para C^0



Cuadrilátero lineal

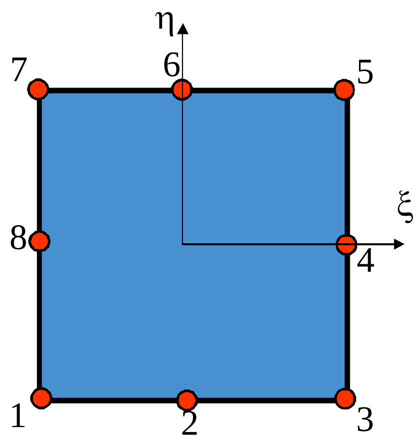


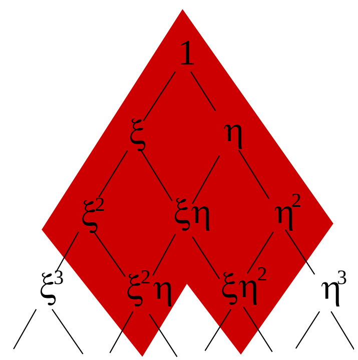
$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1-\eta)(1-\xi)/4 \\
N_2 &= (1-\eta)(1+\xi)/4 \\
N_3 &= (1+\eta)(1+\xi)/4 \\
N_4 &= (1+\eta)(1-\xi)/4
\end{aligned}
$$

6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

6.2.2.- Elementos Serendípitos

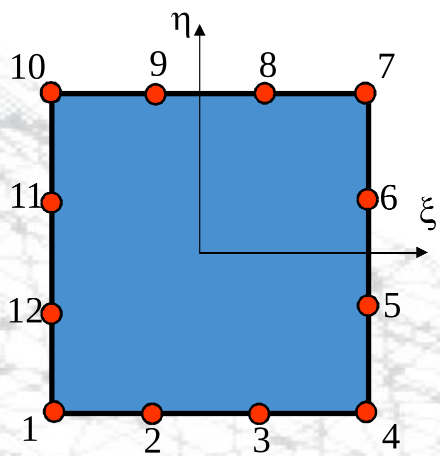
Cuadrilátero Cuadrático

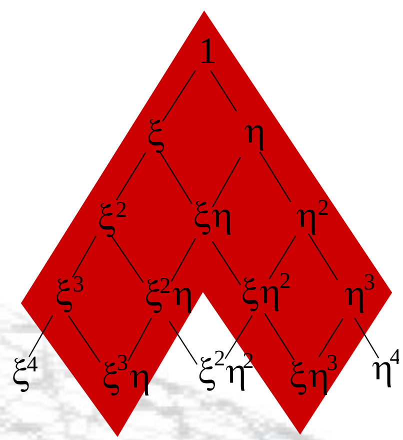




$$N_1 = -(1-\eta)(1-\xi)(1+\xi+\eta)/4$$
$$N_2 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$$
$$N_3 = -(1-\eta)(1+\xi)(1-\xi+\eta)/4$$
$$N_4 = (1-\eta^2)(1+\xi)/2$$
$$N_5 = -(1+\eta)(1+\xi)(1-\xi-\eta)/4$$
$$N_6 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$$
$$N_7 = -(1+\eta)(1-\xi)(1+\xi-\eta)/4$$
$$N_8 = (1-\eta^2)(1-\xi)/2$$

Cuadrilátero Cúbico

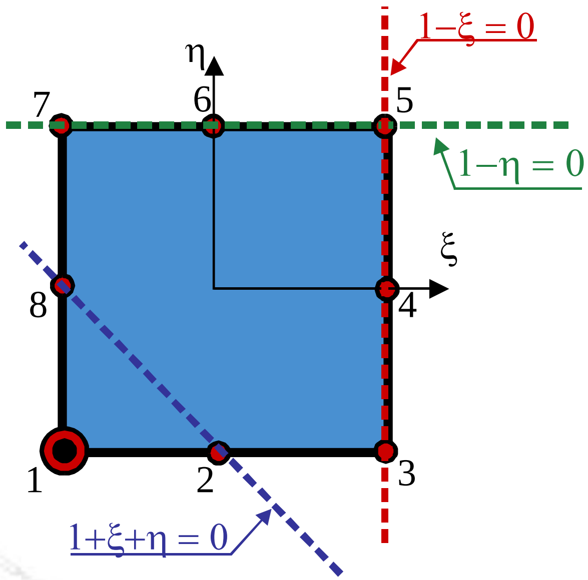




$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)\left[9(\xi^2+\eta^2)-10\right]/32$$
$$N_2 = 9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\xi)/32$$
$$N_3 = 9(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\xi)/32$$
$$N_4 = (1+\xi)(1-\eta)\left[9(\xi^2+\eta^2)-10\right]/32$$

6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

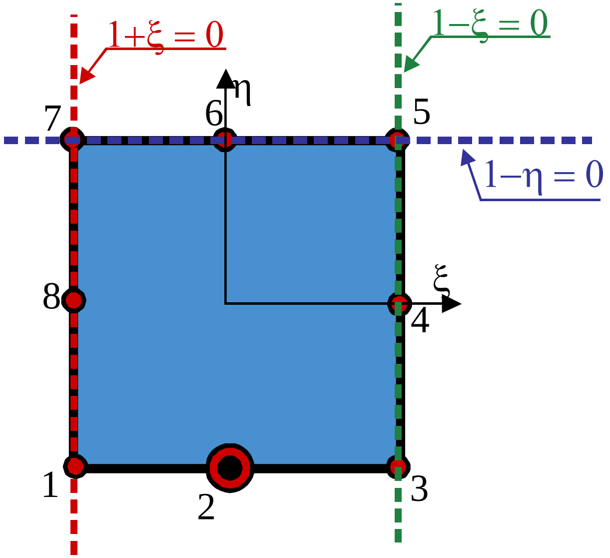
6.2.3.- Determinación de funciones de forma.



$$f(\xi,\eta)=(1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(1+\xi+\eta)$$

$$f(-1,-1)=(1-(-1))\cdot(1-(-1))\cdot(1+(-1)+(-1))=-4$$

$$\boxed{N_1(\xi,\eta)=\frac{f(\xi,\eta)}{f(-1,-1)}=\frac{(1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(1+\xi+\eta)}{-4}}$$



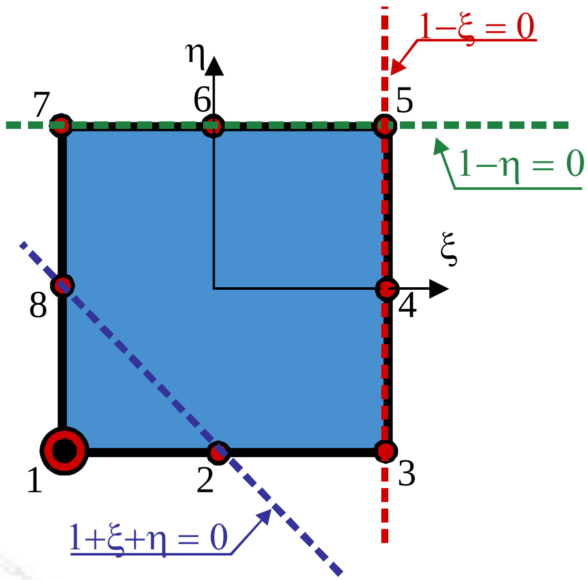
$$f(\xi,\eta)=(1-\xi)\cdot(1+\xi)\cdot(1-\eta)$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{f(\xi,\eta)}{f(0,-1)}=\frac{(1-\xi)\cdot(1+\xi)\cdot(1-\eta)}{2}$$

$$\boxed{N_2(\xi,\eta)=\frac{(1-\xi^2)\cdot(1-\eta)}{2}}$$

6.- Elementos bi-dimensionales 6.2.- Cuadriláteros

6.2.3.- Determinación de funciones de forma.



$$f(\xi,\eta) = (1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(1+\xi+\eta)$$

$$f(-1,-1) = (1-(-1))\cdot(1-(-1))\cdot(1+(-1)+(-1)) = -4$$

$$\boxed{N_1(\xi,\eta) = \frac{f(\xi,\eta)}{f(-1,-1)} = \frac{(1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(1+\xi+\eta)}{-4}}$$

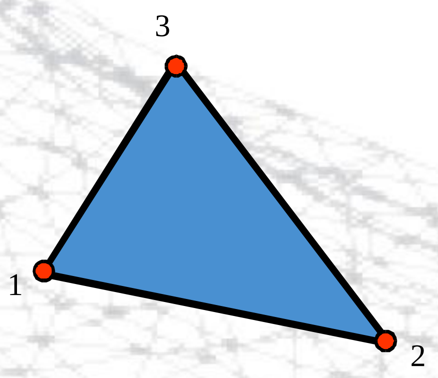
Reglas:

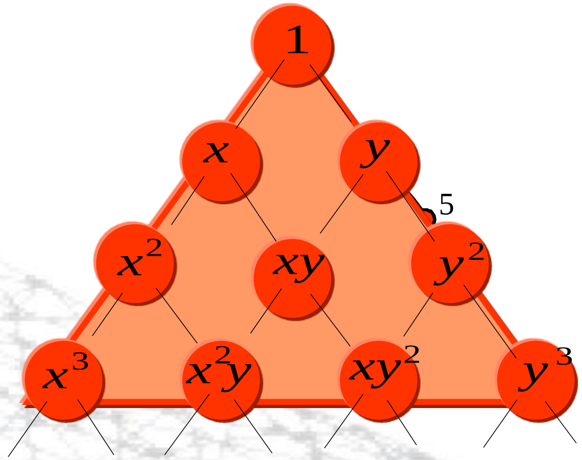
- Rectas por los lados que no contengan al nodo
- Rectas con máximo número de nodos para minimizar términos polinómicos
- Expresiones sencillas, si es posible en función de una sola variable
- Isotropría ⇒ tantas rectas horizontales como verticales
- Comprobar que $\Sigma \mathbf{N}_i(x,y,z) = 1$

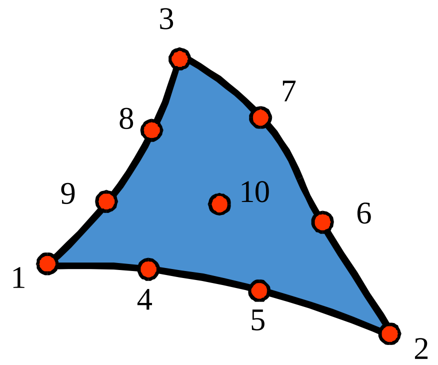
6.- Elementos bi-dimensionales 6.3.- Triángulos

Ventajas e inconvenientes de triángulos sobre cuadriláteros

- Aproximación más sencilla de contornos (generación automática de mallas)
- Distribución de nodos similar a términos en triángulo de Pascal: interpolación sin términos parásitos
- Superficie modelado por un elemento triangular de tamaño ‘*h*’ menor que la correspondiente al cuadrilátero del mismo tamaño

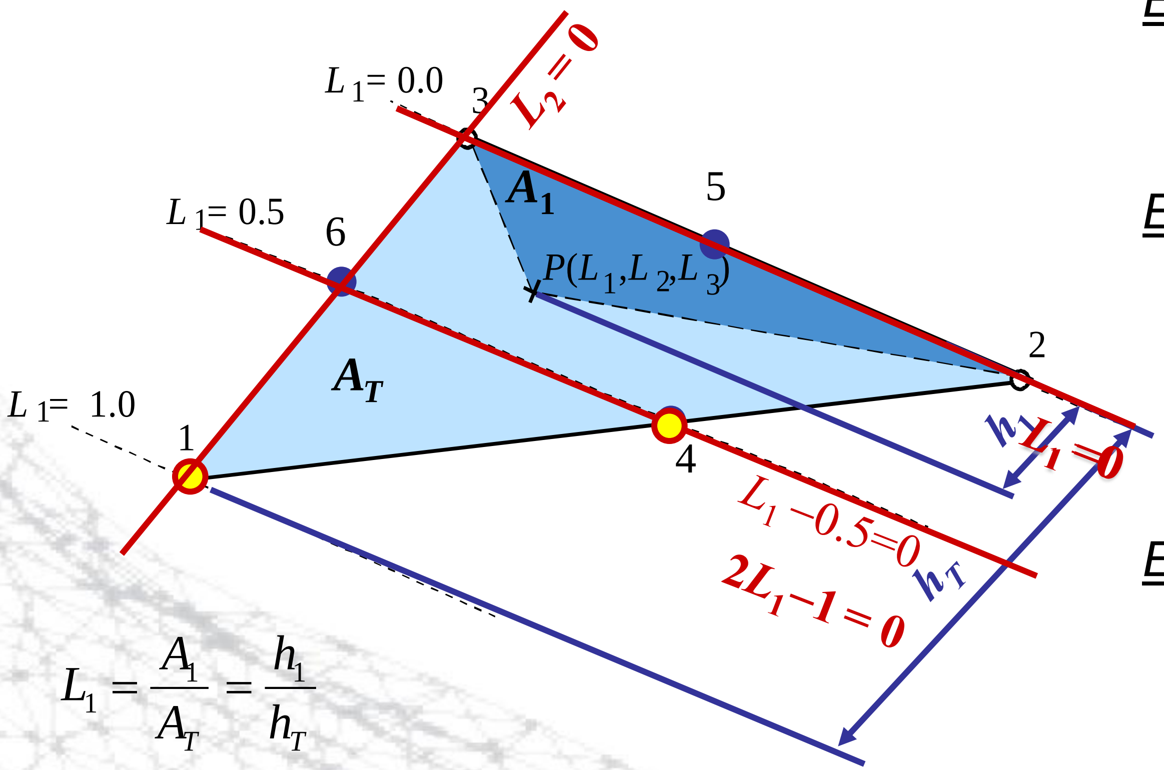






6.- Elementos bi-dimensionales 6.3.- Triángulos

6.3.1.- Coordenadas de área L_1, L_2, L_3



$$L_1 = \frac{A_1}{A_T} = \frac{h_1}{h_T}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_T} = \frac{A_T}{A_T}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

Elem. Lineales

$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3$

Elem. Cuadráticos

$N_1 = (2L_1 - 1)L_1$ (vért)

$N_4 = 4L_1L_2$ (lado)

Elem. Cúbicos

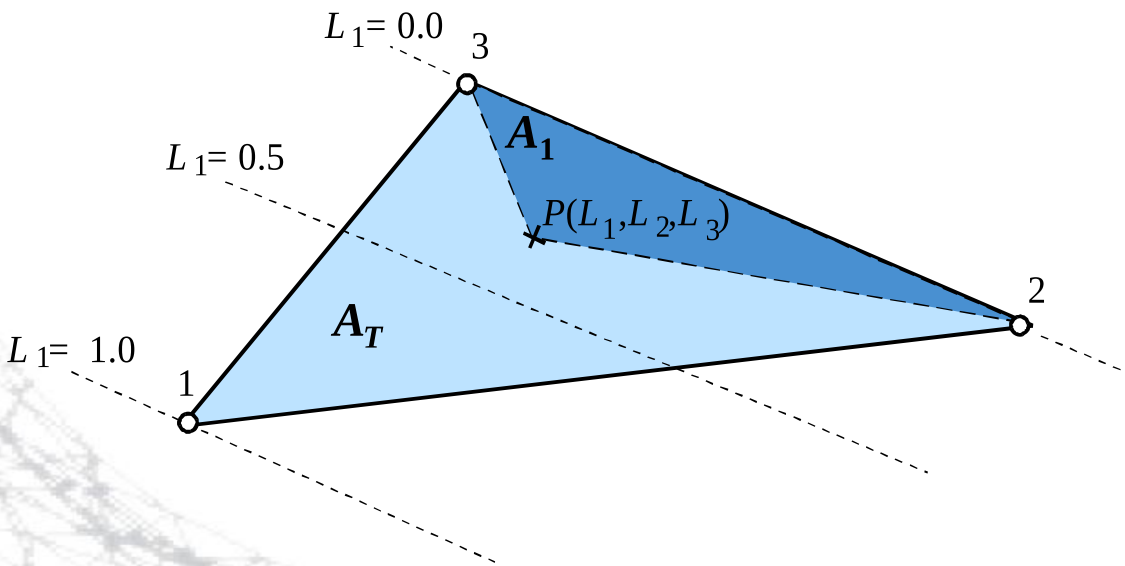
$N_1 = (3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1/2$ (vért)

$N_4 = 9L_1L_2(3L_1 - 1)/2$ (lado)

$N_{10} = 27L_1L_2L_3$ (interior)

6.- Elementos bi-dimensionales 6.3.- Triángulos

6.3.1.- Coordenadas de área $\boldsymbol{L_1, L_2, L_3}$



Elem. Lineales

$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3$

Elem. Cuadráticos

$N_1 = (2L_1\text{-}1)L_1$ (vért)

$N_4 = 4L_1L_2$ (lado)

Elem. Cúbicos

$N_1 = (3L_1\text{-}1)(3L_1\text{-}2)L_1/2$ (vért)

$N_4 = 9L_1L_2(3L_1\text{-}1)/2$ (lado)

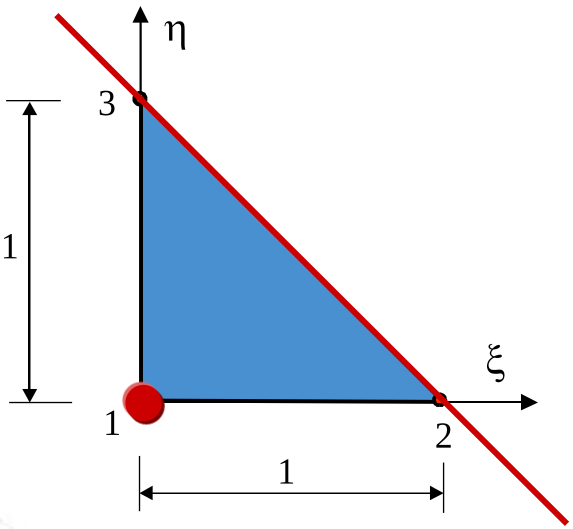
$N_{10} = 27L_1L_2L_3$ (interior)

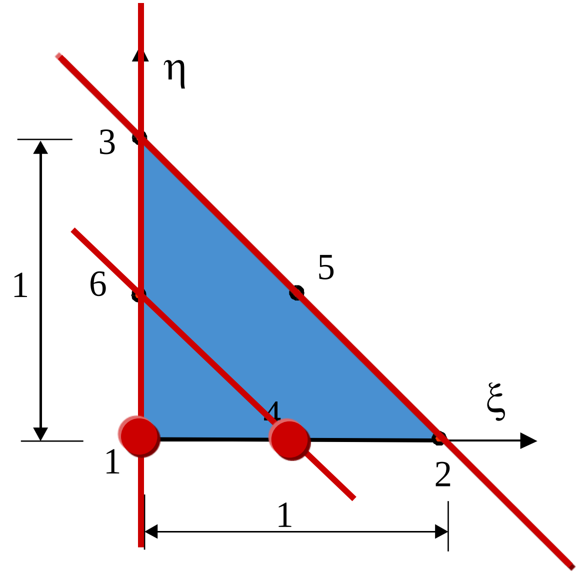
Integración:

$$\iint L_1^a L_2^b L_3^c \, dx\,dy = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta$$

6.- Elementos bi-dimensionales 6.3.- Triángulos

6.3.2.- Coordenadas normalizadas



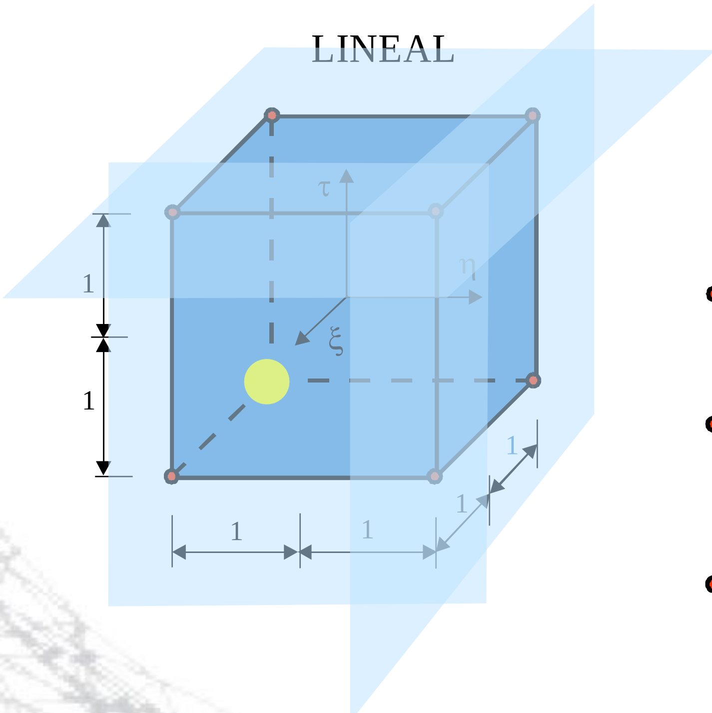


$$\boxed{N_1 = 1-\xi-\eta}$$
$$N_2 = \xi$$
$$N_3 = \eta$$

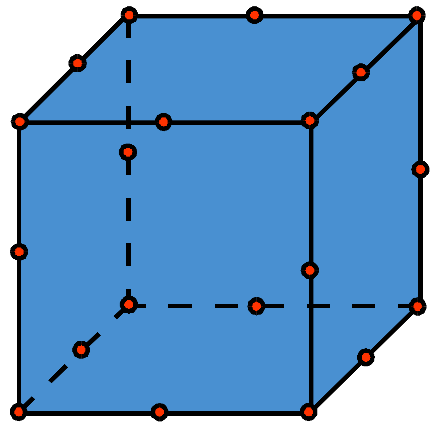
$$\boxed{N_1 = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)}$$
$$N_2 = -\xi(1-2\xi)$$
$$N_3 = -\eta(1-2\eta)$$
$$\boxed{N_4 = 4\xi(1-\xi-\eta)}$$
$$N_5 = 4\xi\eta$$
$$N_6 = 4\eta(1-\xi-\eta)$$

ÍNDICE

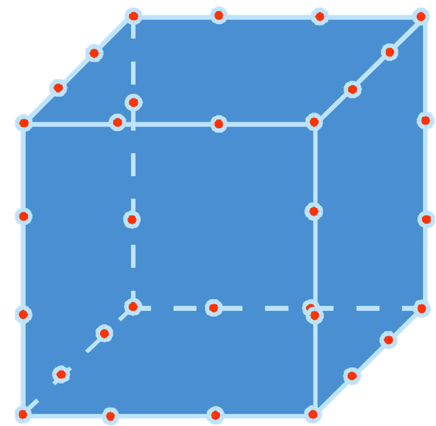
7.- Elementos tri-dimensionales



CUADRATICO



CUBICO



$$\xi_0=\xi\xi_i \quad ; \quad \eta_0=\eta\eta_i \quad ; \quad \tau_0=\tau\tau_i$$

$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1-\tau_0)$$

ÍNDICE

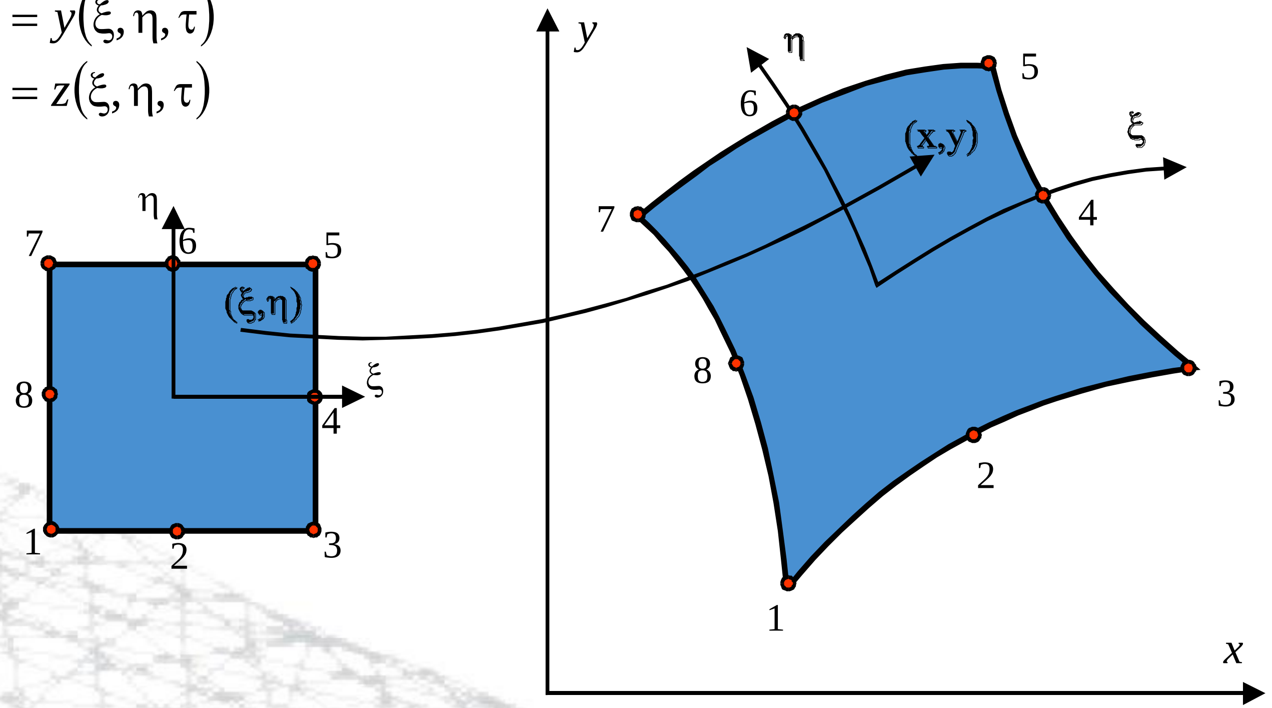
8.- Transf. coordenadas.

Funciones de forma en coordenadas normalizadas (ξ,η,τ)

$\Downarrow$

Transformación de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \tau \end{Bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \tau) \\ y &= y(\xi, \eta, \tau) \\ z &= z(\xi, \eta, \tau) \end{aligned}$$



8.- Transf. coordenadas. 8.1.- Elem. Isoparamétricos

- Transformación de coordenadas con funciones de forma ***N'***:

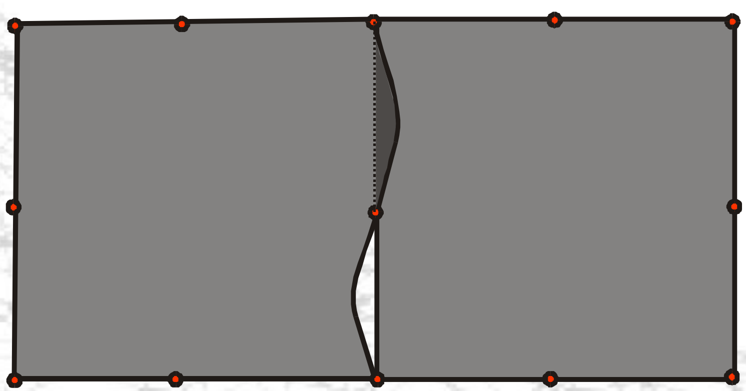
$$x = \sum N_i^{'}(\xi, \eta, \tau) x_i$$
$$y = \sum N_i^{'}(\xi, \eta, \tau) y_i$$
$$z = \sum N_i^{'}(\xi, \eta, \tau) z_i$$

N' no necesariamente funciones de interpolación de desplazamientos (***N***)

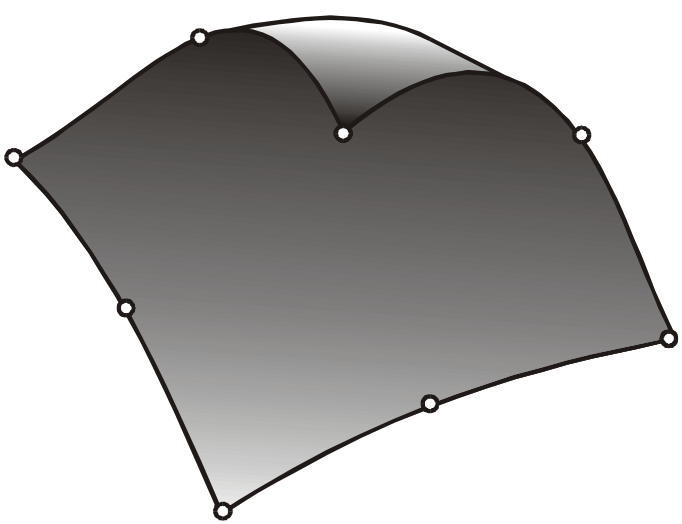
- Requisitos:

Continuidad C^0 $\Rightarrow$

Elementos Isoparamétricos: $N' = N$



Limitar distorsión



8.- Transf. coordenadas. 8.2.- Cálculo matrices elemento

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV$$

$$\mathbf{B} = f\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial z}\right)$$

No disponibles

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \tau} \end{Bmatrix}}_{\checkmark} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \tau} & \dfrac{\partial y}{\partial \tau} & \dfrac{\partial z}{\partial \tau} \end{bmatrix}}_{x=\sum N_i(\xi,\eta,\tau)\, x_i} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}}_{\times} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \tau} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}$$

$$x = \sum N_i(\xi,\eta,\tau)\, x_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i(\xi,\eta,\tau)}{\partial \xi} x_i$$

$$dV = |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\tau$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, |\mathbf{J}| \, d\xi \, d\eta \, d\tau$$

$\Rightarrow$ **Integración numérica**

ÍNDICE

9.- Integración numérica.

Matrices de elementos finitos en coordenadas locales. Ejemplo:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \underline{\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}}\,\underline{dV} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\left|\mathbf{J}\right| d\xi\, d\eta\, d\tau$$

- **Límites más sencillos**
- **Integrando más complejo**

Requiere integración numérica

En general:

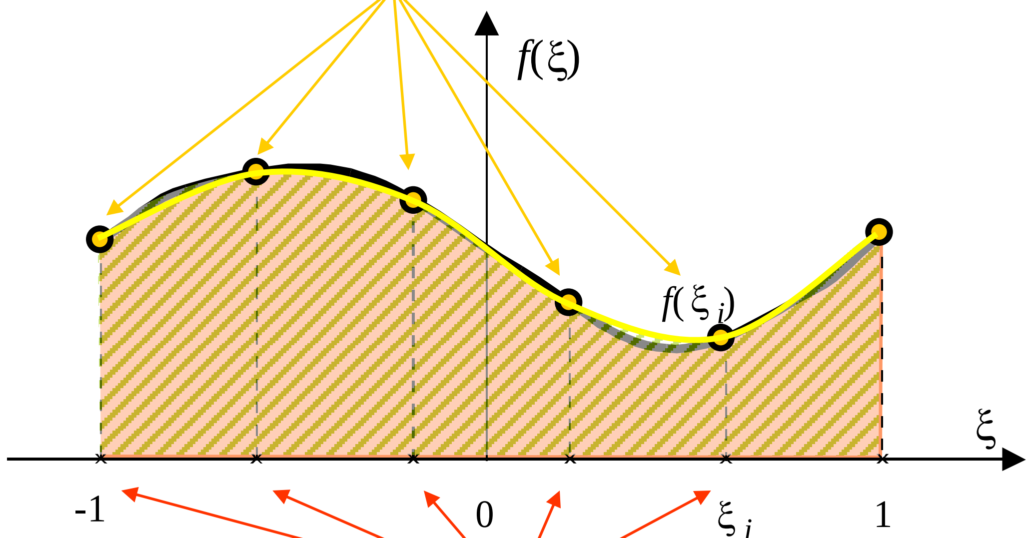
$$\int_{V_g} \overline{G(x,y,z)}\,\overline{dx\,dy\,dz} = \int_{V_l} G(\xi,\eta,\tau)\left|\mathbf{J}\right| d\xi\, d\eta\, d\tau$$

9.- Integración numérica. 9.1.- 1-D

$$I=\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i)$$

H_i* = peso asociado a punto *i

Valor de la función en puntos de muestreo $f(\xi_i)$



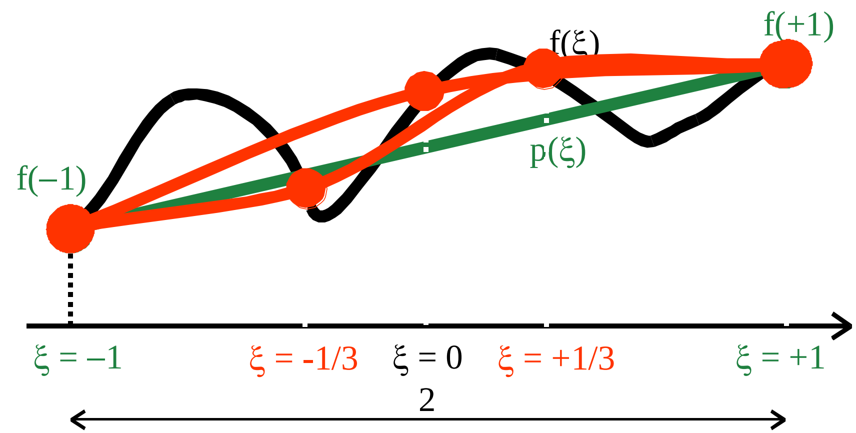
Puntos de muestreo ξ_i

Cuadratura Newton-Cotes:

- Puntos muestreo ***predefinidos*** equi-espaciados
- Ajuste de polinomio a puntos muestreo
- Integración exacta del polinomio ($\Rightarrow$ Cálculo de H_i)

9.- Integración numérica. 9.1.- 1-D

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i)$$



$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi$$

$$\approx \int_{-1}^{1} p(\xi)\, d\xi$$

$$= 2 \cdot \frac{f(-1) + f(+1)}{2}$$

$$= 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i)$$

Cuadratura Newton-Cotes:

n	ξ_i	H_i
2	-1.0	1.0
	1.0	1.0

Regla Trapecio

n	ξ_i	H_i
3	-1.0	1/3
	0.0	4/3
	1.0	1/3

Regla Simpson

n	ξ_i	H_i
4	-1.0	1/4
	-1/3	3/4
	1/3	3/4
	1.0	1/4

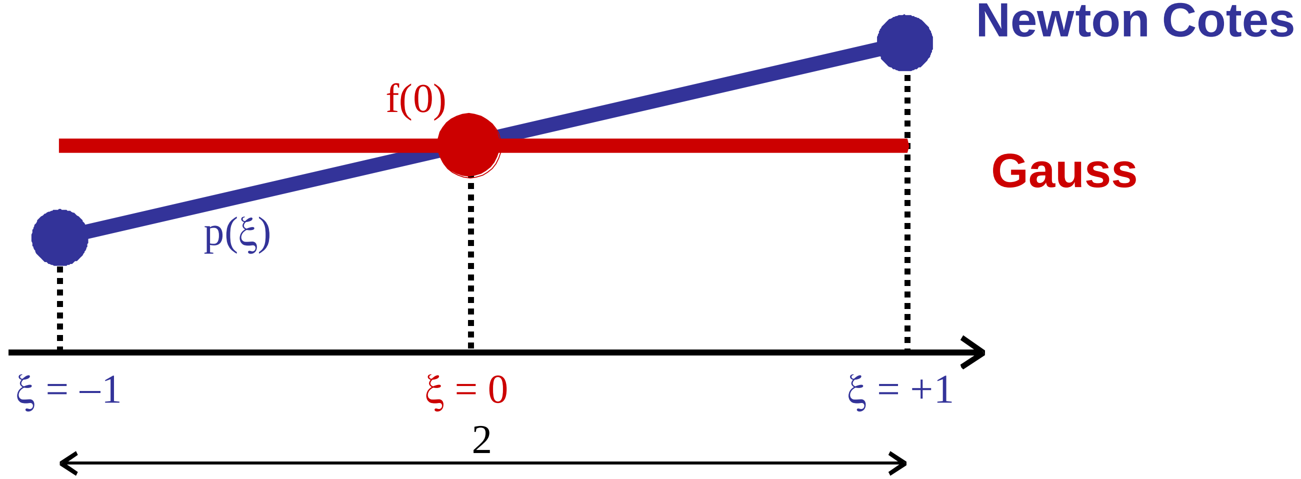
n puntos

$\Rightarrow$ integración exacta de polinomios de grado *n*-1

$\Rightarrow$ error de grado *n* $O(h^n)$

9.- Integración numérica. 9.1.- 1-D

Cuadratura Gauss:



$$I = \int f(\xi)d\xi$$

$$\approx 1\cdot f(-1) + 1\cdot f(+1) = \sum_{i=1}^{2} H_i^{NC}{}_i\, f(\xi_i^{NC})$$

$$= 2\cdot f(0) = \sum_{i=1}^{1} H_i^{G} f(\xi_i^{G})$$

9.- Integración numérica. 9.1.- 1-D

Cuadratura Gauss:

n	$\pm\xi_i$	H_i	Integra exact
1	0.0	2.000 000 000 000 000	$p=1$
2	±0.577 350 269 189 626	1.000 000 000 000 000	$p=3$
3	±0.774 596 669 241 483 0.000 000 000 000 000	0.555 555 555 555 556 0.888 888 888 888 889	$p=5$
4	±0.861 136 311 594 953 ±0.339 981 043 584 856	0.347 854 845 137 454 0.652 145 154 862 546	$p=7$
5	±0.906 179 845 938 664 ±0.538 469 310 105 683 0.000 000 000 000 000	0.236 926 885 056 189 0.478 628 670 499 366 0.568 888 888 888 889	$p=9$

n **puntos**	**Newton Cotes**	**Gauss**
Integra exactamente polinomios de grado	$n-1$	$2n-1$
Error de grado	n $O(h^n)$	$2n$ $O(h^{2n})$

9.- Integración numérica. 9.1.- 2-D y 3-D

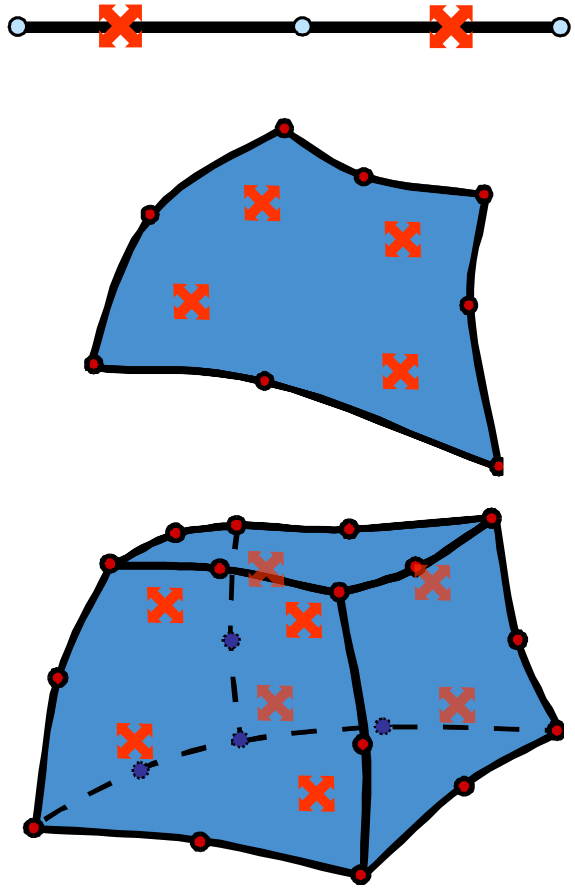
Cuadriláteros y hexaedros: Extrapolación del caso unidimensional

$$I=\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i)$$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j\, f(\xi_i,\eta_j)$$

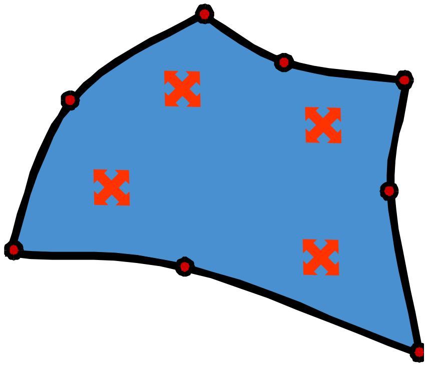
$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} H_i H_j H_k\, f(\xi_i,\eta_j,\tau_k)$$



9.- Integración numérica. 9.1.- 2-D y 3-D

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_i H_j\, f(\xi_i,\eta_j)$$



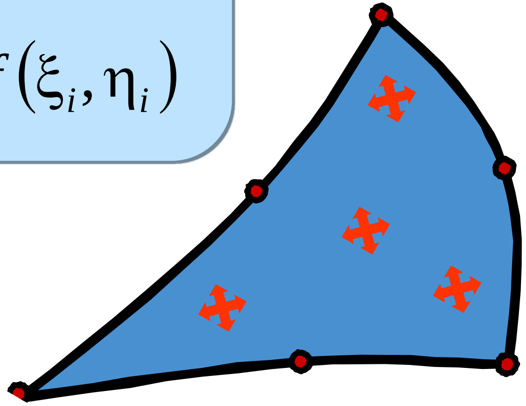
Triángulos y tetraedros:

Puntos de integración específicos

$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\eta} f(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(\xi_i,\eta_i)$$

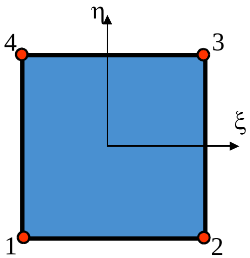
n	ξ_i	η_i	H_i	Integra exactamente
1	1/3	1/3	1/2	$p=1$
3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6 1/6 1/6	$p=2$
3	1/2 1/2 0	0 1/2 1/2	1/6 1/6 1/6	$p=2$
4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96	$p=3$

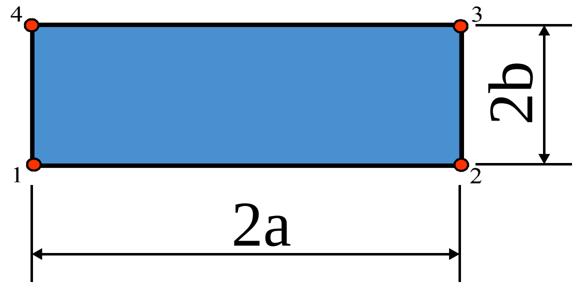


9.- Integración numérica.

9.3.- Orden de integración requerido. Integración reducida

↑ **Num. ptos** ➔ ↓ Error de integración numérica
↑ Precisión análisis
↑ Coste computacional





$$\mathbf{K}^e = \int_{V^l} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dV \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

- **J**, |**J**|, $\mathbf{J}^{-1}$ ctes.
- **B**=**B**($\mathbf{J}^{-1}$,…) ➔ **B** términos lineales
- $\mathbf{B}^T$ **DB** |**J**| términos cuadráticos

➔ Integr.exacta con 2x2 ptos Gauss

<u>En Elementos distorsionados</u>:

J ≠ Cte

$\mathbf{J}^{-1}$ no tendrá grado finito

$\mathbf{B}^T$ **DB** |**J**| no tendrá grado finito

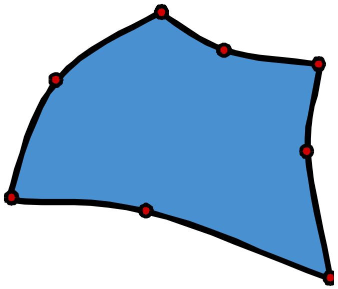
Regla de muy alto grado
(No necesaria)

¿Grado integración?

9.- Integración numérica.

9.3.- Orden de integración requerido. Integración reducida

Recomendaciones para cuadrilátero cuadrático serendípito



	En general	Considerablemente distorsionados
Zienkiewicz y Taylor	2 x 2	2 x 2
Burnet	2 x 2	3 x 3
Bathe	3 x 3	Superiores

9.- Integración numérica.

9.3.- Orden de integración requerido. Integración reducida

Criterio de Burnett para elementos no muy distorsionados:

La regla de integración debe preservar la velocidad de convergencia de la energía de deformación global

Orden de errores de discretización:

$\mathbf{u}$	$O(h^{p+1})$
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$	$O(h^{p})$
$\Pi = \dfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$	$O(h^{2p})$

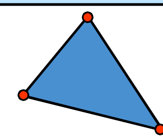
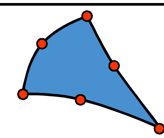
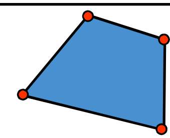
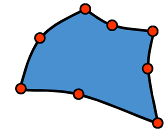
$\Rightarrow O(h^{2p})$ en la Integración numérica

$\Rightarrow$ Integración exacta de pol **$2p$-1**

Integración reducida

Ventaja:

mismos puntos que los de superconvergencia de tensiones

Elemento	Integración reducida	Integración estándar
	**1 pto**	**3 ptos**
	**4 ptos**	**6 ptos**
	**1×1 ptos**	**2×2 ptos**
	**2×2 ptos**	**3×3 ptos**

9.- Integración numérica.

9.3.- Orden de integración requerido. Integración reducida

Posibles situaciones:

Resultados mucho más precisos que la estándar, *cuando un parámetro se aproxima a su límite.*

Ej: materiales casi incompresibles y placas delgadas

Resultados desastrosos*. Singularidades en* ***K***

Es necesario experimentar

Regla general:

Elementos poco distorsionados $\Rightarrow$ ***Integración reducida***

Elementos distorsionados $\Rightarrow$ ***Integración estándar***

Buen comportamiento de integración reducida. Justificación:

- Formulación en desplazamientos **sobrestima K**
- Integración reducida **subestima K**

Compensación de errores

ÍNDICE

10.- Funciones de forma jerárquicas

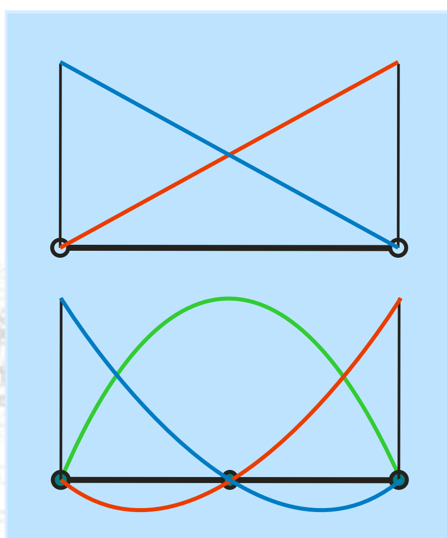
Las funciones de forma convencionales (nodales) de un elemento se modifican al aumentar el orden de aproximación polinómica

Se modifican las matrices de elemento y hay que realizar todos los cálculos de nuevo

Funciones convencionales

Elemento lineal

Elemento cuadrático



$$N_1^l = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_2^l = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

$$N_1^c = \frac{1}{2}\xi(1-\xi)$$

$$N_2^c = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

$$N_3^c = (1-\xi^2)$$

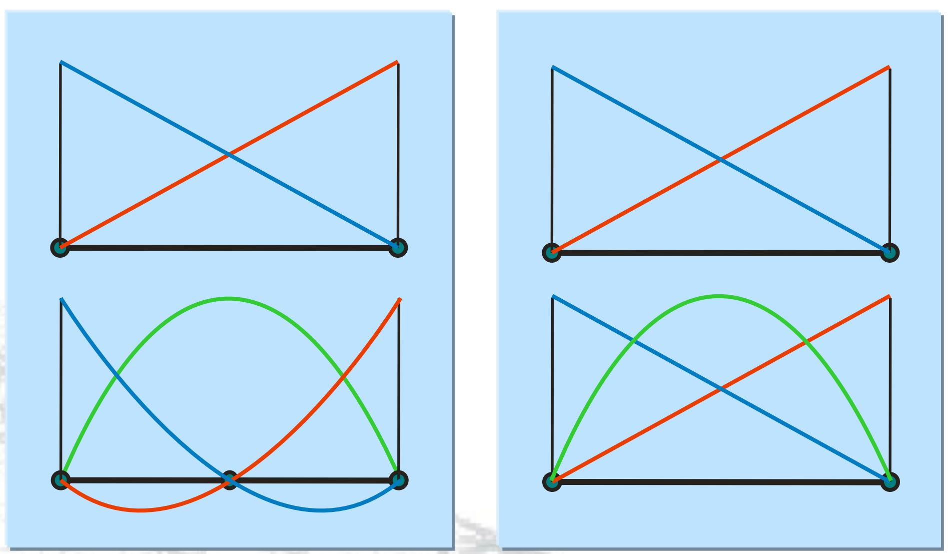
10.- Funciones de forma jerárquicas

Las funciones de forma correspondientes al orden *p* de aproximación polinómica están incluidas en las de orden *p*+1

Funciones convencionales | Funciones jerárquicas

Elemento lineal

Elemento cuadrático



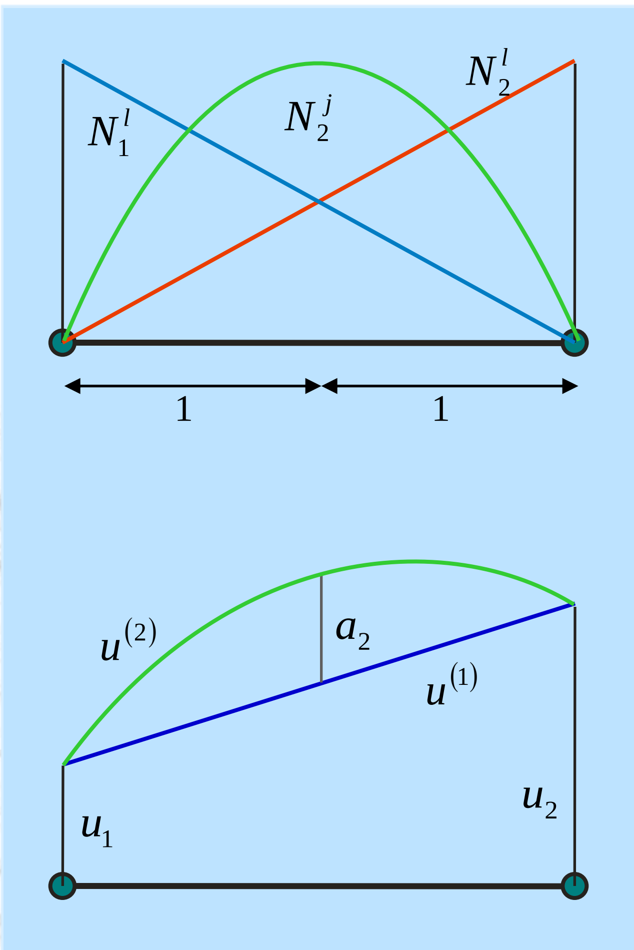
- No se modifican las funciones de forma al aumentar el orden de interpolación

- Pueden reutilizarse cálculos anteriores

- Los g.d.l. no son valores nodales

10.- Funciones de forma jerárquicas

Caso unidimensional



Interpolación lineal:

$$u^{(1)}(\xi) = \underbrace{N_1^l(\xi)u_1 + N_2^l(\xi)u_2}_{\text{funciones nodales}}$$

Interpolación cuadrática:

$$u^{(2)}(\xi) = \underbrace{N_1^l(\xi)u_1 + N_2^l(\xi)u_2}_{\text{funciones nodales}} + \underbrace{N_2^j(\xi)}_{\boxed{\text{función adicional}}}a_2$$

Valor nulo en los nodos

$$N_2^j(\xi) = \alpha_0\left(1-\xi^2\right)$$

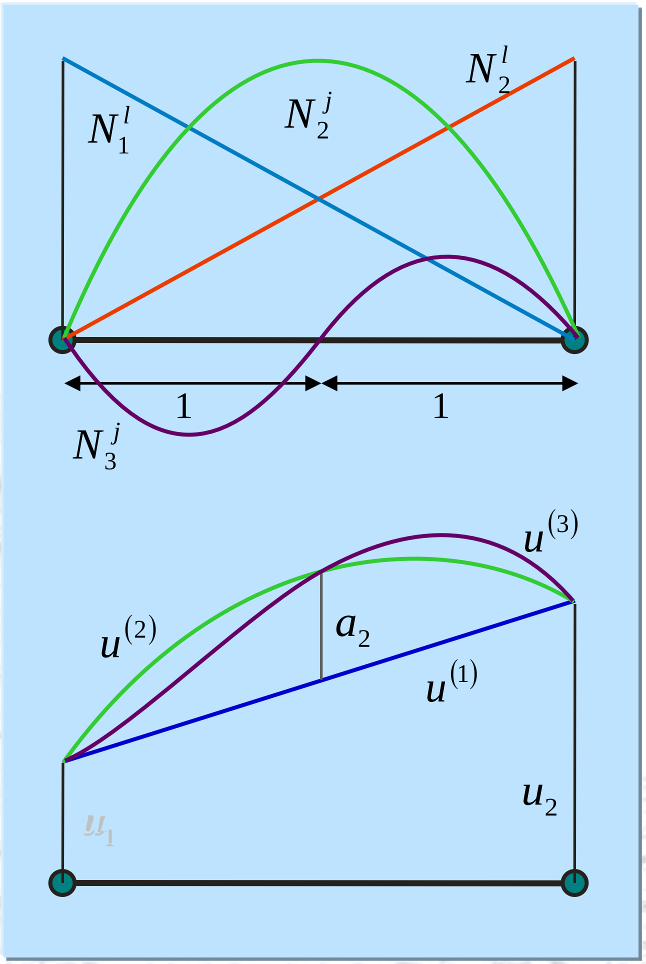
Condición adicional

$$N_2^j(0) = 1$$

$$N_2^j(\xi) = 1-\xi^2$$

10.- Funciones de forma jerárquicas

Caso unidimensional



Interpolación cúbica:

$$u^{(3)}(\xi) = N_1^l(\xi)u_1 + N_2^l(\xi)u_2 + N_2^j(\xi)a_2 + \underbrace{N_3^j(\xi)}_{\text{función adicional}}a_3$$

$$N_3^j(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3$$

Condiciones:

$$N_3^j(-1) = 0\,;\, N_3^j(1) = 0$$ (valor nulo en los nodos)

$$N_3^j(0) = 0$$

$$\left.\frac{dN_3^j}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 1$$

$$N_3^j(\xi) = \xi\left(1-\xi^2\right)$$

10.- Funciones de forma jerárquicas

Caso unidimensional

Las funciones de forma jerárquicas no son únicas ⟷ Requieren condiciones adicionales para su definición

↓

Diferentes familias de funciones jerárquicas → Por ejemplo

$$N_p^j(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{p!}(\xi^p - 1) & p \text{ par} \\ \dfrac{1}{p!}(\xi^p - \xi) & p \text{ impar} \end{cases} \qquad p \geq 2$$

Se pueden buscar familias de funciones jerárquicas que resulten ventajosas

Por ejemplo:

$$k_{ij}^e = \int c_{ij} \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}dx = \frac{2}{h}\int_{-1}^{1} c_{ij}\frac{dN_i}{d\xi}\frac{dN_j}{d\xi}d\xi$$

↕

Término de la matriz de rigidez

Se pueden definir las funciones de forma para que la integral sea nula para $i \neq j$ (matriz $\mathbf{K}$ diagonal)

10.- Funciones de forma jerárquicas

Caso unidimensional

Polinomios de Legendre.- Cumplen la propiedad de ortogonalidad anterior:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!}\frac{1}{2^{p-1}}\frac{d^p\left[\left(\xi^2-1\right)^p\right]}{d\xi^p}$$

$$N_{p+1}^j(\xi) = \int_{-1}^{\xi} P_p(\xi)\, d\xi = \frac{1}{(p-1)!}\frac{1}{2^{p-1}}\frac{d^{p-1}\left[\left(\xi^2-1\right)^p\right]}{d\xi^{p-1}}$$

$$N_2^j = \xi^2 - 1 \quad ; \quad N_3^j = 2(\xi^3 - \xi) \ \ldots$$

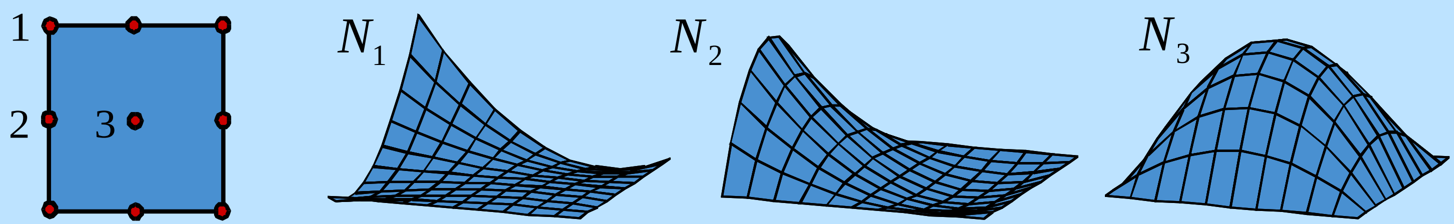
Desacoplamiento únicamente en el caso unidimensional, pero en general existe un mejor condicionamiento numérico

10.- Funciones de forma jerárquicas

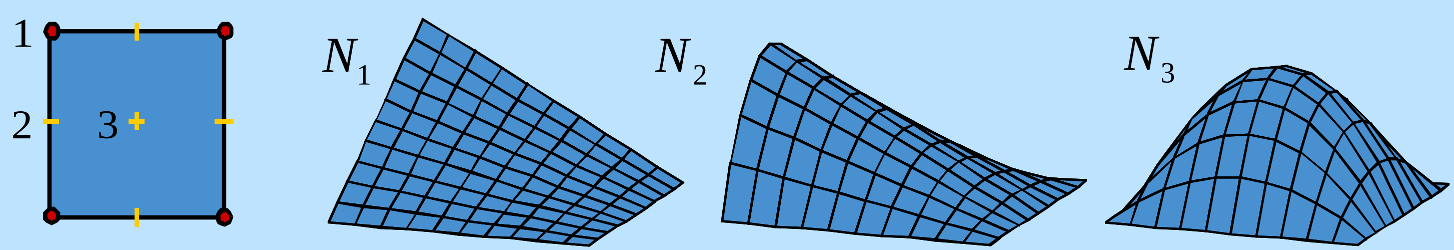
Caso bidimensional y tridimensional: Cuadriláteros y hexaedros

La construcción de las funciones de forma es análoga a la de las funciones lagrangianas de los elementos convencionales → Multiplicando funciones de forma del elemento unidimensional

Cuadrilátero lagrangiano



Cuadrilátero jerárquico



$$N_1(\xi,\eta) = N_1^l(\xi)\, N_2^l(\eta) \qquad N_2(\xi,\eta) = N_1^l(\xi)\, N_2^j(\eta) \qquad N_3(\xi,\eta) = N_2^j(\xi)\, N_2^j(\eta)$$

10.- Funciones de forma jerárquicas

Caso bidimensional y tridimensional: Triángulos y tetraedros

La construcción de las funciones de forma jerárquicas se puede realizar de forma similar al caso anterior a partir de las funciones del elemento triangular lineal y de las funciones del elemento unidimensional expresadas en coordenadas de área