UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

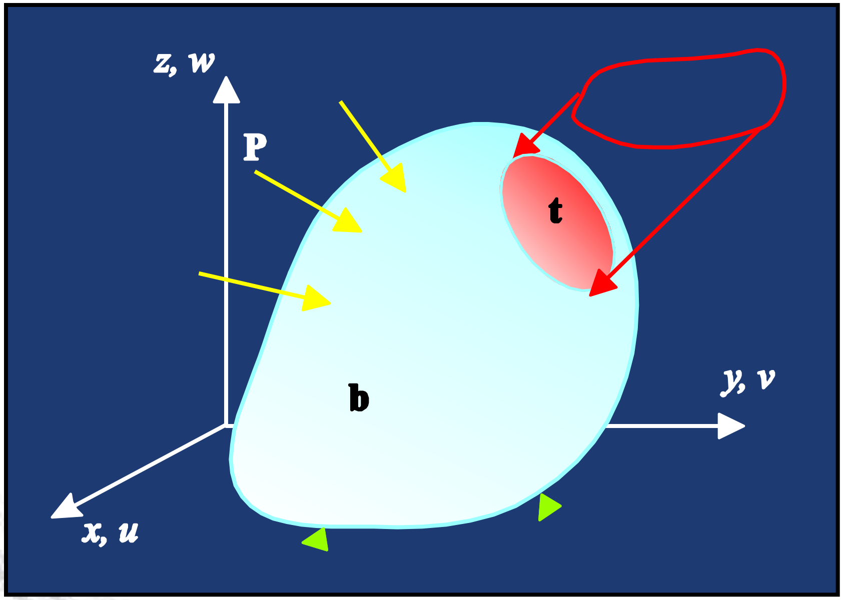
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y APLICACIONES

TEMA 3.- PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL MEF

ÍNDICE

ÍNDICE

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.1.- Revisión de conceptos básicos



PROBLEMA ELÁSTICO

DATOS:

$\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$	Fuerzas volumétricas
$\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$	Fuerzas superficiales
$\mathbf{P}$	Fuerzas puntuales

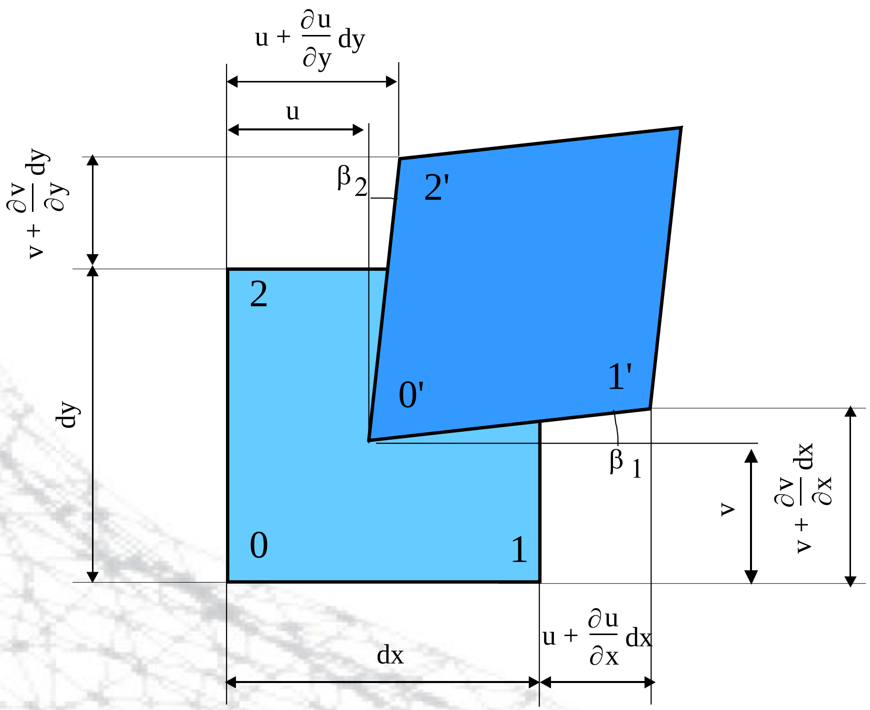
INCÓGNITAS:

$\mathbf{u} = [\ u, v, w]^T$	Desplazamientos
$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \sigma_z \ \ \tau_{xy} \ \ \tau_{yz} \ \ \tau_{zx}]^T$	Tensiones
$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \ \varepsilon_y \ \ \varepsilon_z \ \ \gamma_{xy} \ \ \gamma_{yz} \ \ \gamma_{zx}]^T$	Deformaciones

ENFOQUES { diferencial / variacional }

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.1.- Revisión de conceptos básicos: Ecuaciones

Definición de deformación



$$\varepsilon_x = \frac{L_{0'1'x} - L_{01}}{L_{01}} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) - u}{dy} + \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\,\mathbf{u}$$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.1.- Revisión de conceptos básicos: Ecuaciones

Relaciones tensiones-deformaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \sigma_z \;\; \tau_{xy} \;\; \tau_{yz} \;\; \tau_{zx}\right]^T$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \varepsilon_z \;\; \gamma_{xy} \;\; \gamma_{yz} \;\; \gamma_{zx}\right]^T$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$ ó $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ Ley de Hooke

C : Matriz simétrica de flexibilidades

D : Matriz simétrica de elasticidad

Coef. const. ⇨ elasticidad lineal

General ⇨ 21 coef. Independientes

Ortótropo ⇨ 9 coef. Independientes

Isótropo ⇨ 2 coef. Independientes

$$[D] = \frac{E(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\upsilon}{1-\upsilon} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)} \end{bmatrix}$$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.

1.1.- Revisión de conceptos básicos: Ecuaciones

Relaciones tensiones-deformaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \sigma_z \;\; \tau_{xy} \;\; \tau_{yz} \;\; \tau_{zx}\right]^T$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \varepsilon_z \;\; \gamma_{xy} \;\; \gamma_{yz} \;\; \gamma_{zx}\right]^T$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}$ ó $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ Ley de Hooke

Tensiones y deformaciones iniciales

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right) + \boldsymbol{\sigma}_0 \qquad \left(\; \boldsymbol{\sigma} = \Delta\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0 \;\right)$$

para la temperatura adecuada

Deformaciones térmicas

- Coeficiente de expansión térmica (expansión libre)

$$\alpha = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \qquad \varepsilon = \alpha T \qquad \varepsilon = \int_0^T \alpha \, dT = \overline{\alpha} T \qquad \overline{\alpha} = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha \, dT$$

- Definición de coeficientes de expansión térmica en función del material (general, ortótropo, isótropo)
- Expansión libre, caso ortótropo:

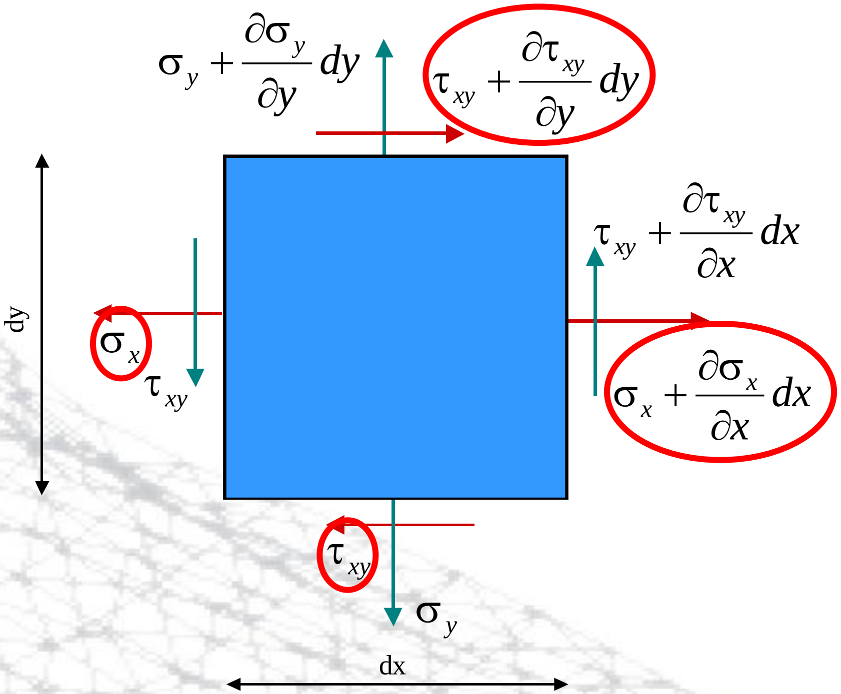
$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left[\alpha_x T \;\; \alpha_y T \;\; \alpha_z T \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right]^T; \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{\sigma}_0 = -\mathbf{D}\left[\alpha_x T \;\; \alpha_y T \;\; \alpha_z T \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right]^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{0}$$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.

1.1.- Revisión de conceptos básicos: Ecuaciones

Ecuaciones de equilibrio estático

EQUILIBRIO INTERNO



$$-\sigma_x t dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) t dy - \tau_{xy} t dx +$$

$$+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) t dx + b_x t dx dy = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

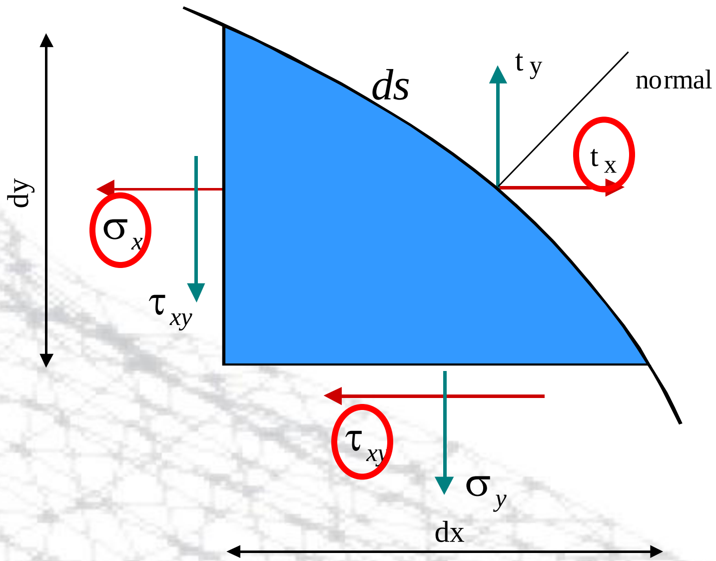
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_y = 0$$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.1.- Revisión de conceptos básicos: Ecuaciones

Ecuaciones de equilibrio estático

EQUILIBRIO EN CONTORNO



$$dA = t\,ds \qquad dx = m\,ds \qquad dy = l\,ds$$

espesor cosenos directores

$$t_x\,t\,ds = \sigma_x\,t\,dy + \tau_{xy}\,t\,dx$$

$$t_x\,t\,ds = \sigma_x\,t\,l\,ds + \tau_{xy}\,t\,m\,ds$$

$$t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}$$

$$t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx}$$

$$t_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$$

$$t_z = l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z$$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.2.- Planteamiento del problema elástico

Planteamiento diferencial (nivel local)

- Método de Desplazamientos
- Método de las Fuerzas
- Método de Desplazamientos - Fuerzas (Métodos Mixtos)

Planteamiento integral (nivel global)

ENFOQUES

- Variacional (energético)
  - Principio de Mínima Energía Potencial Total
  - Principio de los Trabajos Virtuales
  - Principio de Mínima Energía Complementaria
  - Principio de Energía Estacionaria de Reissner
- Residuos ponderados

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.2.- Planteamiento del problema elástico

Energía Potencial Total
de un sistema conservativo:

$$\Pi_p = \Pi - W_p$$

Π (energía deformación) W_p (trabajo fuerzas exteriores)

$$\Pi_p = \underbrace{\int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV}\ \underbrace{- \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}}$$

El campo **u** solución **minimiza** Π_p $\longrightarrow$ $\delta\Pi_p(\mathbf{u}) = \delta\Pi(\mathbf{u}) - \delta W_p(\mathbf{u}) = 0$

1.- Problema elástico. Resolución problemas discretos.
1.2.- Planteamiento del problema elástico

Energía Potencial Total

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}$$

Considerando la relación deformación-desplazamientos: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\mathbf{u}) - (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} \, dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}$$

Energía Potencial Total en función del campo de desplazamientos

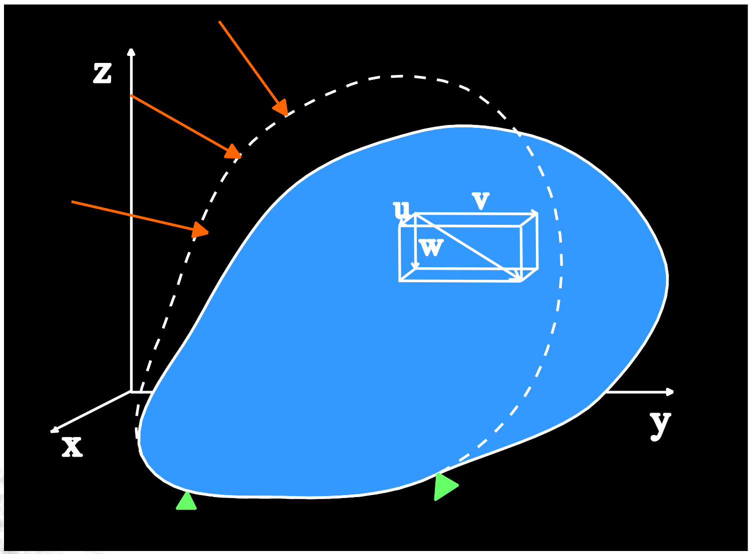
MEF: APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS

→ **ECUACIONES DE EQUILIBRIO APROXIMADAS**

ÍNDICE

2.- Método de Rayleigh-Ritz

(1º) Supone una aproximación û a la solución u



Función de prueba

Incógnitas

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \boxed{\hat{u}(x,y,z)} \\ \hat{v}(x,y,z) \\ \hat{w}(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{l} \boxed{a_i} f_i(x,y,z) \\ \sum_{i=l+1}^{m} a_i f_i(x,y,z) \\ \sum_{i=m+1}^{n} a_i f_i(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

Elección apropiada de f_i $\equiv$ **funciones polinómicas que cumplan cond. contorno esenciales**

(2º) Evaluación Π_p $\qquad \Pi_p \approx \hat{\Pi}_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

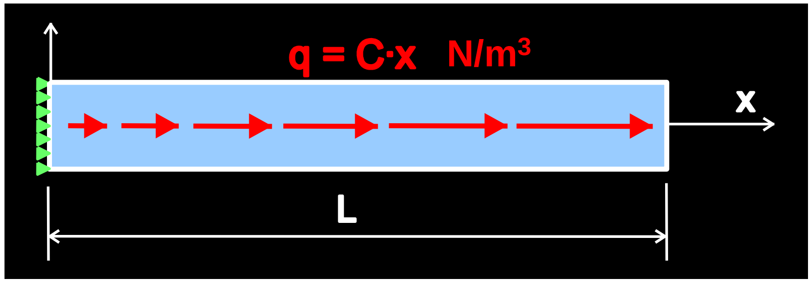
(3º) Minimización $\hat{\Pi}_p$ $\qquad \dfrac{\partial \hat{\Pi}_p}{\partial a_i} = 0\ ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

(n ecs. algebraicas, con n incógnitas a_i)

Núm. términos ↑ (a_i↑) ⟶ precisión ↑

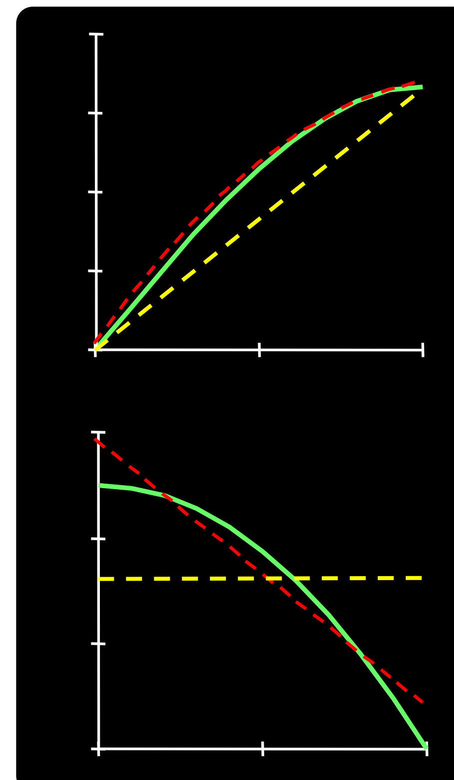
2.- Método de Rayleigh-Ritz

Cond. Contorno:
$u(0) = 0$
$\sigma_x(L) = 0$



A = Área sección transversal constante
E = Módulo de elasticidad constante

	Solución exacta	1ª solución aproximada	2ª solución aproximada
Desplazamientos	$u(x)$	$\hat{u}_1(x) = a_1 x$	$\hat{u}_2(x) = a_1 x + a_2 x^2$
	$u(x) = \frac{C}{6E}\left(3L^2 x - x^3\right)$	$\hat{u}_1(x) = \frac{CL^2}{3E}x$	$\hat{u}_2(x) = \frac{CL}{12E}\left(7Lx - 3x^2\right)$
Tensiones	$\sigma_x(x) = \frac{C}{2}\left(L^2 - x^2\right)$	$\hat{\sigma}_{x1}(x) = \frac{CL^2}{3}$	$\hat{\sigma}_{x2}(x) = \frac{CL}{12}(7L - 6x)$

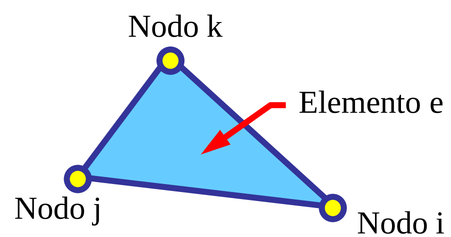


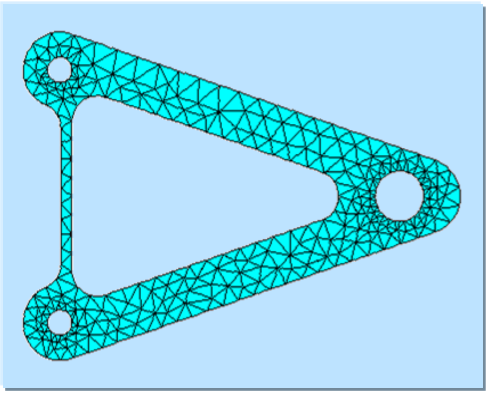
Solución más rígida que la exacta

ÍNDICE

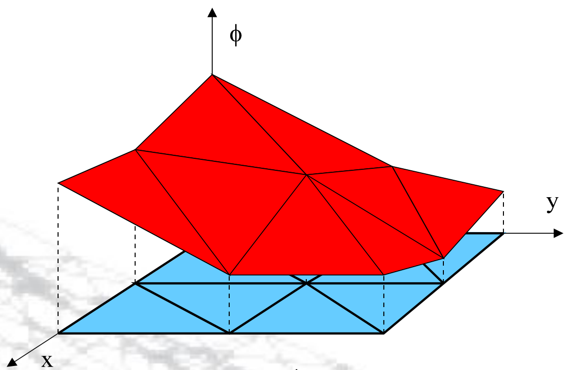
3.- Formulación en desplazamientos

(1º) Discretiza el dominio en "elementos"
(subdominios muy simples)





(2º) Supone una aproximación a la solución u *en cada subdominio*



A partir de las estimaciones para los **desplazamientos nodales** u_i

Interpola u en cada elemento

(3º) Evaluación $\hat{\Pi}_p$

$$\Pi_p \approx \hat{\Pi}_p(u_1, u_2, \ldots u_N)$$

(4º) Minimización $\hat{\Pi}_p$

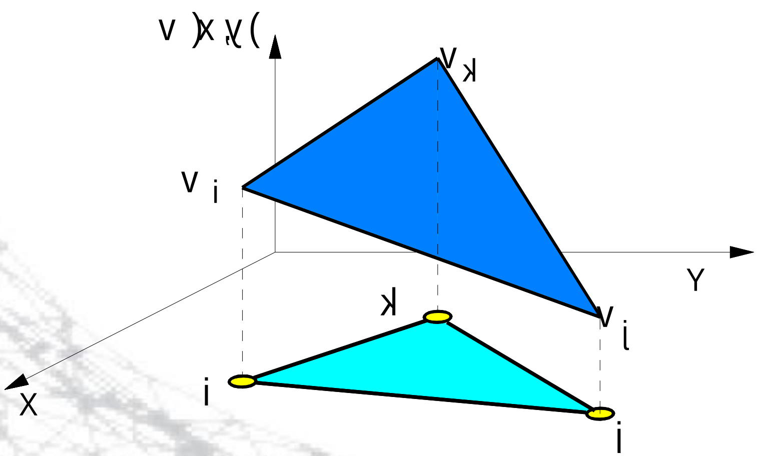
$$\frac{\partial \hat{\Pi}_p}{\partial u_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

(N ecs. algebraicas, con N incógnitas u_i)

3.- Formulación en desplazamientos

Funciones de forma = Funciones de interpolación en cada elemento

Aproximación a partir de los valores nodales:



(En 2D y para elementos de 3 nodos)

Func. de forma ≡ Polinomio

$$v(x,y) \approx \hat{v}(x,y) = \boxed{N_i(x,y)} \cdot \underbrace{v_i} + N_j(\ ) \cdot \underbrace{v_j} + N_k(\ ) \cdot \underbrace{v_k}$$

Valores nodales

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}(x,y) \\ \hat{v}(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i(x,y) & 0 & N_j(\ ) & 0 & N_k(\ ) & 0 \\ 0 & N_i(x,y) & 0 & N_j(\ ) & 0 & N_k(\ ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(x,y,z) \approx \hat{\mathbf{u}}(x,y,z) = \mathbf{N}(x,y,z)\,\mathbf{u}^e$$

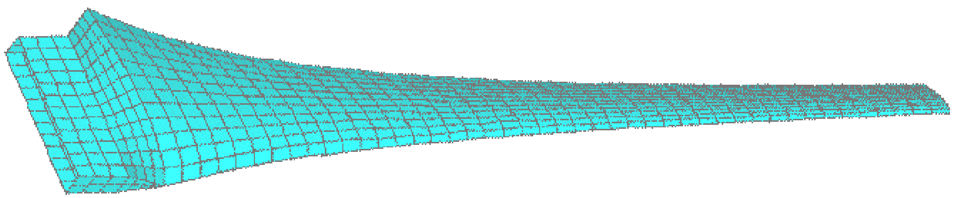
3.- Formulación en desplazamientos

Energía potencial total

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}$$

Discretización

$$V = \bigcup_{e=1}^{ne} V^e$$



Continuidad C^0

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{S^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}$$

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{Lu})^T \mathbf{DLu} - (\mathbf{Lu})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + (\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{S^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}^e$ y vectores $\mathbf{f}^e$

$$\Pi_p^e = \boxed{+\int_{V^e} \frac{1}{2}(\mathbf{Lu})^T \mathbf{DLu}\, dV} - \int_{V^e} (\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\, dV + \int_{V^e} (\mathbf{Lu})^T \boldsymbol{\sigma}_0\, dV - \int_{V^e} \mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \int_{S^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t}\, dS$$

$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\,\mathbf{u}^e$ Aproximación nodal

$$+\int_{V^e} \frac{1}{2}\left(\mathbf{LNu}^e\right)^T \mathbf{DLNu}^e\, dV$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\,\mathbf{N}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{V^e} \mathbf{u}^{e^T} \mathbf{B}^T \mathbf{DBu}^e\, dV$$

$$\Pi_p^e \approx +\frac{1}{2}\mathbf{u}^{e^T}\underbrace{\left[\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{DB}\, dV\right]}_{\mathbf{k}^e}\mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{e^T}\underbrace{\left\{\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV\right\}}_{\mathbf{f}^e_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}} - \mathbf{u}^{e^T}\underbrace{\left\{-\int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV\right\}}_{\mathbf{f}^e_{\boldsymbol{\sigma}_0}} - \mathbf{u}^{e^T}\underbrace{\left\{\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, dV\right\}}_{\mathbf{f}^e_{\mathrm{b}}} - \mathbf{u}^{e^T}\underbrace{\left\{\int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}\, dS\right\}}_{\mathbf{f}^e_{\mathrm{t}}}$$

$\mathbf{k}^e$ **Matriz de rigidez**

$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}^e_{\boldsymbol{\varepsilon}_0} + \mathbf{f}^e_{\boldsymbol{\sigma}_0} + \mathbf{f}^e_{\mathrm{b}} + \mathbf{f}^e_{\mathrm{t}}$

$\mathbf{f}^e$ **fuerzas equivalentes en nodos**

$$\Pi_p \approx \sum_{e=1}^{ne} \Pi_p^e - \mathbf{U}^T\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \Pi_p \approx \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{ne} \mathbf{u}^{e^T}\mathbf{k}^e\mathbf{u}^e - \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{u}^{e^T}\mathbf{f}^e - \mathbf{U}^T\mathbf{P}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}^e$ y vectores $\mathbf{f}^e$

$$\Pi_p \approx \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{ne}\mathbf{u}^{e^T}\mathbf{k}^e\mathbf{u}^e - \sum_{e=1}^{ne}\mathbf{u}^{e^T}\mathbf{f}^e - \mathbf{U}^T\mathbf{P}$$

Vectores y matriz “expandidos”

(Ej. en 2D y elem. de 3 nodos)

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{nn} \end{Bmatrix}_N \qquad \mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} f^e_{i,x} \\ f^e_{i,y} \\ f^e_{j,x} \\ \vdots \\ f^e_{k,y} \end{Bmatrix}_6 \rightarrow \mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^e_{i,x} \\ f^e_{i,y} \\ 0 \\ \vdots \\ f^e_{k,y} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_N$$

$$\Pi_p \approx \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\sum_{e=1}^{ne}\mathbf{K}^e\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\sum_{e=1}^{ne}\mathbf{F}^e - \mathbf{U}^T\mathbf{P}$$

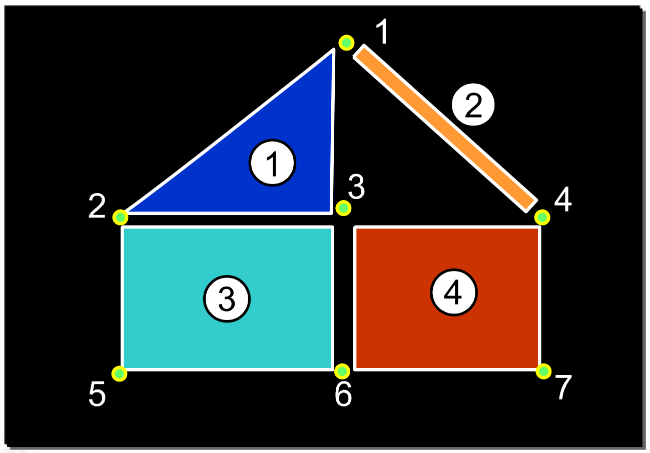
Matriz de rigidez global

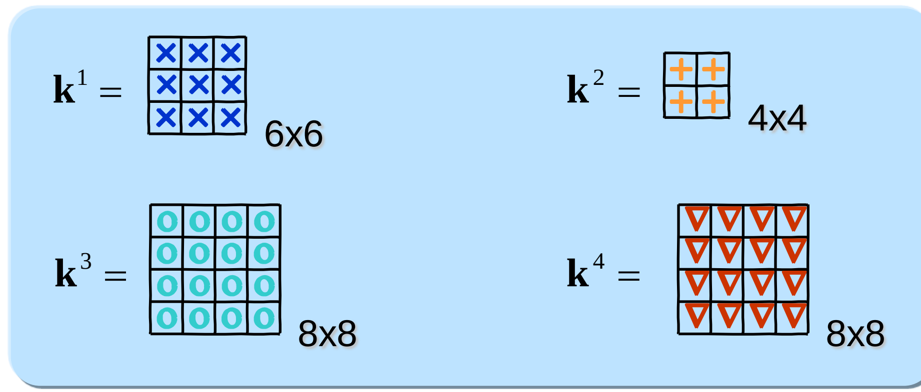
Vector de fuerzas equivalentes global

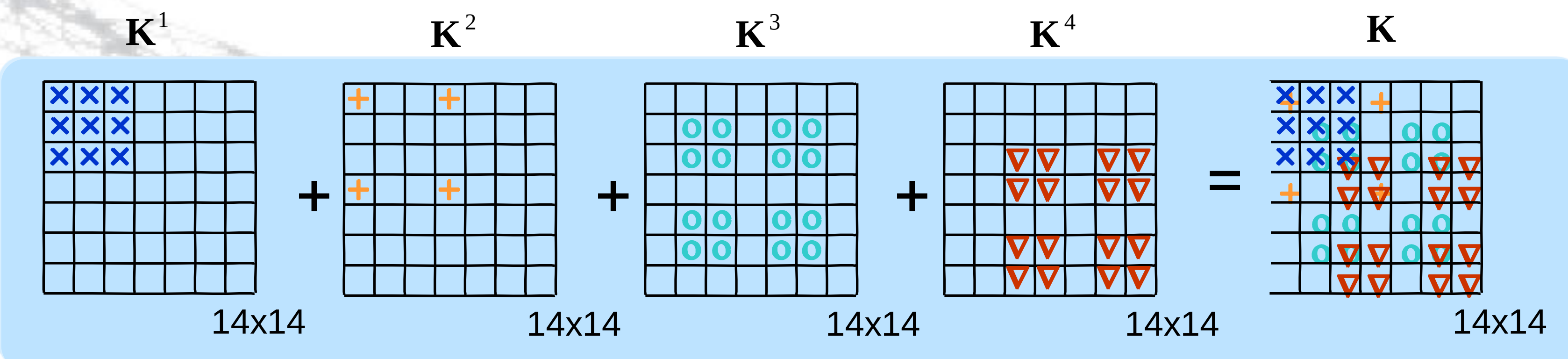
$$\Pi_p \approx \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\mathbf{F}$$

3.- Formulación en desplazamientos — 3.1.- Matrices $\mathbf{k}^e$ y vectores $\mathbf{f}^e$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e$$

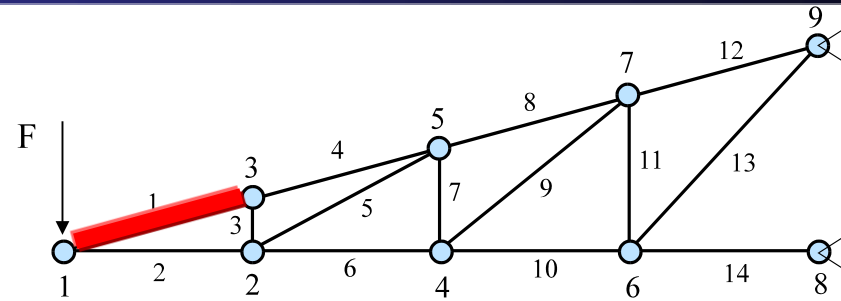






3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$

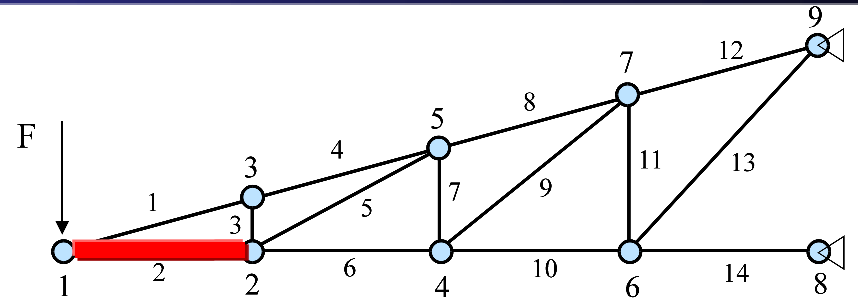


$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix}
k_{11}^1+k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^1 & & & & & & \\
k_{21}^2 & k_{22}^2+k_{22}^3+k_{22}^5+k_{22}^6 & k_{23}^3 & k_{24}^6 & k_{25}^5 & & & & \\
k_{31}^1 & k_{32}^3 & k_{33}^1+k_{33}^3+k_{33}^4 & & k_{35}^4 & & & & \\
 & k_{42}^6 & & k_{44}^6+k_{44}^7+k_{44}^9+k_{44}^{10} & k_{45}^7 & k_{46}^{10} & k_{47}^9 & & \\
 & k_{52}^6 & k_{53}^4 & k_{54}^7 & k_{55}^4+k_{55}^5+k_{55}^7+k_{55}^8 & & k_{57}^8 & & \\
 & & & k_{64}^{10} & & k_{66}^{10}+k_{66}^{11}+k_{66}^{13}+k_{66}^{14} & k_{67}^{11} & k_{68}^{14} & k_{69}^{13} \\
 & & & k_{74}^9 & k_{75}^8 & k_{76}^{11} & k_{77}^8+k_{77}^9+k_{77}^{11}+k_{77}^{12} & & k_{79}^{12} \\
 & & & & & k_{86}^{14} & & k_{88}^{14} & \\
 & & & & & k_{96}^{13} & k_{97}^{12} & & k_{99}^{12}+k_{99}^{13}
\end{bmatrix}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$

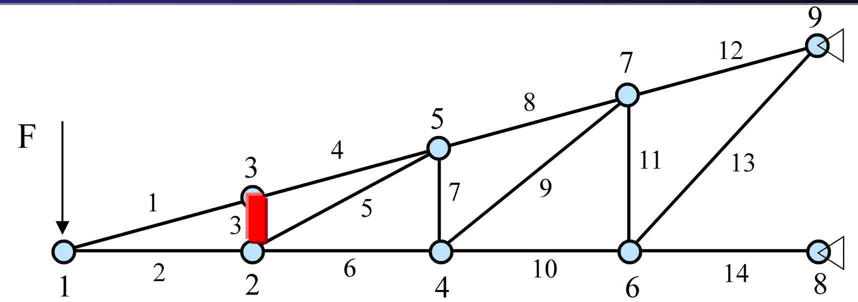


$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k^e_{ii} & k^e_{ij} \\ k^e_{ji} & k^e_{jj} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix}
k^1_{11}+k^2_{11} & k^2_{12} & k^1_{13} & & & & & & \\
k^2_{21} & k^2_{22}+k^3_{22}+k^5_{22}+k^6_{22} & k^3_{23} & k^6_{24} & k^5_{25} & & & & \\
k^1_{31} & k^3_{32} & k^1_{33}+k^3_{33}+k^4_{33} & & k^4_{35} & & & & \\
 & k^6_{42} & & k^6_{44}+k^7_{44}+k^9_{44}+k^{10}_{44} & k^7_{45} & k^{10}_{46} & k^9_{47} & & \\
 & k^6_{52} & k^4_{53} & k^7_{54} & k^4_{55}+k^5_{55}+k^7_{55}+k^8_{55} & & k^8_{57} & & \\
 & & & k^{10}_{64} & & k^{10}_{66}+k^{11}_{66}+k^{13}_{66}+k^{14}_{66} & k^{11}_{67} & k^{14}_{68} & k^{13}_{69} \\
 & & & k^9_{74} & k^8_{75} & k^{11}_{76} & k^8_{77}+k^9_{77}+k^{11}_{77}+k^{12}_{77} & & k^{12}_{79} \\
 & & & & & k^{14}_{86} & & k^{14}_{88} & \\
 & & & & & k^{13}_{96} & k^{12}_{97} & & k^{12}_{99}+k^{13}_{99}
\end{bmatrix}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$

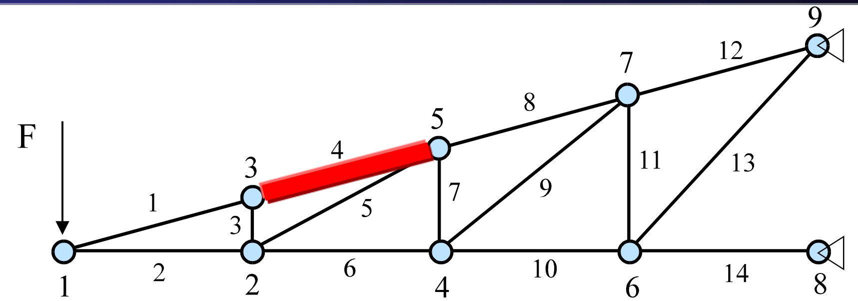


$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix}
k_{11}^1+k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^1 & & & & & & \\
k_{21}^2 & k_{22}^2+k_{22}^3+k_{22}^5+k_{22}^6 & k_{23}^3 & k_{24}^6 & k_{25}^5 & & & & \\
k_{31}^1 & k_{32}^3 & k_{33}^1+k_{33}^3+k_{33}^4 & & k_{35}^4 & & & & \\
 & k_{42}^6 & & k_{44}^6+k_{44}^7+k_{44}^9+k_{44}^{10} & k_{45}^7 & k_{46}^{10} & k_{47}^9 & & \\
 & k_{52}^6 & k_{53}^4 & k_{54}^7 & k_{55}^4+k_{55}^5+k_{55}^7+k_{55}^8 & & k_{57}^8 & & \\
 & & & k_{64}^{10} & & k_{66}^{10}+k_{66}^{11}+k_{66}^{13}+k_{66}^{14} & k_{67}^{11} & k_{68}^{14} & k_{69}^{13} \\
 & & & k_{74}^9 & k_{75}^8 & k_{76}^{11} & k_{77}^8+k_{77}^9+k_{77}^{11}+k_{77}^{12} & & k_{79}^{12} \\
 & & & & & k_{86}^{14} & & k_{88}^{14} & \\
 & & & & & k_{96}^{13} & k_{97}^{12} & & k_{99}^{12}+k_{99}^{13}
\end{bmatrix}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$

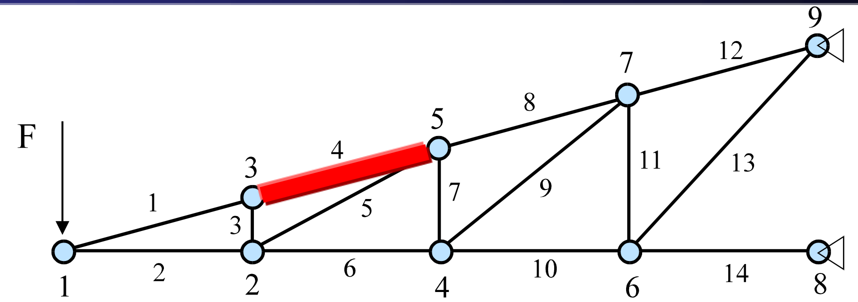


$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix}
k_{11}^1+k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^1 & & & & & & \\
k_{21}^2 & k_{22}^2+k_{22}^3+k_{22}^5+k_{22}^6 & k_{23}^3 & k_{24}^6 & k_{25}^5 & & & & \\
k_{31}^1 & k_{32}^3 & k_{33}^1+k_{33}^3+k_{33}^4 & & k_{35}^4 & & & & \\
 & k_{42}^6 & & k_{44}^6+k_{44}^7+k_{44}^9+k_{44}^{10} & k_{45}^7 & k_{46}^{10} & k_{47}^9 & & \\
 & k_{52}^6 & k_{53}^4 & k_{54}^7 & k_{55}^4+k_{55}^5+k_{55}^7+k_{55}^8 & & k_{57}^8 & & \\
 & & & k_{64}^{10} & & k_{66}^{10}+k_{66}^{11}+k_{66}^{13}+k_{66}^{14} & k_{67}^{11} & k_{68}^{14} & k_{69}^{13} \\
 & & & k_{74}^9 & k_{75}^8 & k_{76}^{11} & k_{77}^8+k_{77}^9+k_{77}^{11}+k_{77}^{12} & & k_{79}^{12} \\
 & & & & & k_{86}^{14} & & k_{88}^{14} & \\
 & & & & & k_{96}^{13} & k_{97}^{12} & & k_{99}^{12}+k_{99}^{13}
\end{bmatrix}$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$



$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} k^e_{ii} & k^e_{ij} \\ k^e_{ji} & k^e_{jj} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
k^1_{11}+k^2_{11} & k^2_{12} & k^1_{13} & & & & & & \\
k^2_{21} & k^2_{22}+k^3_{22}+k^5_{22}+k^6_{22} & k^3_{23} & k^6_{24} & k^5_{25} & & & & \\
k^1_{31} & k^3_{32} & k^1_{33}+k^3_{33}+k^4_{33} & & k^4_{35} & & & & \\
 & k^6_{42} & & k^6_{44}+k^7_{44}+k^9_{44}+k^{10}_{44} & k^7_{45} & k^{10}_{46} & k^9_{47} & & \\
 & k^6_{52} & k^4_{53} & k^7_{54} & k^4_{55}+k^5_{55}+k^7_{55}+k^8_{55} & & k^8_{57} & & \\
 & & & k^{10}_{64} & & k^{10}_{66}+k^{11}_{66}+k^{13}_{66}+k^{14}_{66} & k^{11}_{67} & k^{14}_{68} & k^{13}_{69} \\
 & & & k^9_{74} & k^8_{75} & k^{11}_{76} & k^8_{77}+k^9_{77}+k^{11}_{77}+k^{12}_{77} & & k^{12}_{79} \\
 & & & & & k^{14}_{86} & & k^{14}_{88} & \\
 & & & & & k^{13}_{96} & k^{12}_{97} & & k^{12}_{99}+k^{13}_{99}
\end{bmatrix}$$

Propiedades:

- simétrica
- semidefinida positiva
- en banda

$$\mathbf{U}^t\mathbf{K}\mathbf{U} \geq 0$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}^e$ y vectores $\mathbf{f}^e$

$\mathbf{U}$ Solución $\equiv$ $\mathbf{U}$ Minimiza la Energía Potencial Total

$$\Pi_p \approx \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\mathbf{F}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \rightarrow \boxed{\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F}}$$

Sist. algebraico
N ecs. N incóg.
(indeterminado)

$\equiv$ Ecs. de equilibrio en nodos

Vector solución de desplazamientos nodales:

$$\left(\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad + \quad \text{Restricciones en desplazamientos (cond. contorno esenciales)} \right) \rightarrow \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{nn} \end{Bmatrix}_N \rightarrow \mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ \vdots \\ v_k \end{Bmatrix}_6$$

3.- Formulación en desplazamientos

3.1.- Matrices $\mathbf{k}_e$ y vectores $\mathbf{f}_e$

Desplazamientos nodales prescritos:

$\mathbf{U}_r$ gdl restringidos
$\mathbf{U}_l$ gdl libres

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lr} \\ \mathbf{K}_{rl} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix}$$

Obtención de desplazamientos de gdl libres:

$$\mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{lr}\mathbf{U}_r = \mathbf{F}_l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l = \mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{lr}\mathbf{U}_r}$$

Obtención de reacciones $\mathbf{F}_r$ (gdl restringidos):

$$\boxed{\mathbf{K}_{rl}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{U}_r = \mathbf{F}_r}$$

3.- Formulación en desplazamientos 3.2.- Cálc. de tensiones

$\mathbf{u}^e$

Desplazamientos: $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$

Deformaciones: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$

Tensiones: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$

Matrices y vectores son funciones de punto

Tensiones menos precisas que los desplazamientos

Precisión del calculo de tensiones:

- Elementos lineales: centroide
- Elementos de orden elevado: puntos óptimos de calculo de tensiones cercanos a los de integración numérica
- Obtención de tensiones en otros puntos mediante extrapolación.

ÍNDICE

4.- Requisitos de convergencia

Convergencia de la solución MEF ⟷ **El error en la solución aproximada tiende a cero al aumentar el número de gdl**

↑ ne (refinamiento)

Considerando:

- Interpolación polinómica
- Variable $\phi = \phi(x,y,z)$ y funcional $\Pi = \Pi(\phi)$ con derivadas de orden m

Requisitos generales de convergencia:

- Dentro de cada elemento la aproximación de ϕ debe contener un polinomio de grado completo m
- Debe existir continuidad en ϕ y en sus $m-1$ derivadas a lo largo de los contornos entre elementos
- A medida que la malla se refina, debe poder representarse un valor constante de cualquier derivada m-ésima de ϕ cuando se aplican las condiciones de contorno apropiadas sobre la malla

4.- Requisitos de convergencia

Problema elástico → Variable $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,y,z)$ y funcional $\Pi = \Pi(\mathbf{u})$ con derivadas de orden $m = 1$

Requisitos generales de convergencia:

- Dentro de cada elemento la aproximación de ϕ debe contener un polinomio de grado completo m:

$$u(x,y,z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \cdots$$

- Debe existir continuidad en ϕ y en sus $m-1$ derivadas a lo largo de los contornos entre elementos:

Continuidad C^0

- A medida que la malla se refina, debe poder representarse un valor constante de cualquier derivada m-ésima de ϕ cuando se aplican las condiciones de contorno apropiadas sobre la malla

A medida que se refina pueden representarse tensiones constantes