UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

Universidad Industrial de Santander

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y APLICACIONES

TEMA 1

INTRODUCCIÓN

ÍNDICE

1. Métodos numéricos para resolución de EDP

Problema de contorno:

Es un problema gobernado por:

- ecuaciones diferenciales o integrales en un dominio, y
- condiciones de contorno en la frontera del dominio

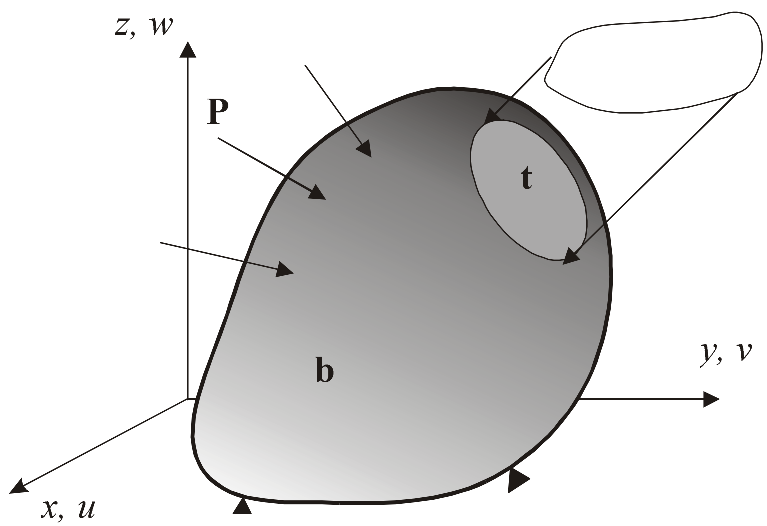
Ejemplo: *problema elástico*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

$$\left|\begin{array}{l} t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ t_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ t_z = l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{array}\right.$$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$$



1. Métodos numéricos para resolución de EDP

Problema de contorno:

Es un problema gobernado por:

- ecuaciones diferenciales o integrales en un dominio, y
- condiciones de contorno en la frontera del dominio

Generalmente no se dispone de una solución analítica exacta

Soluciones numéricas

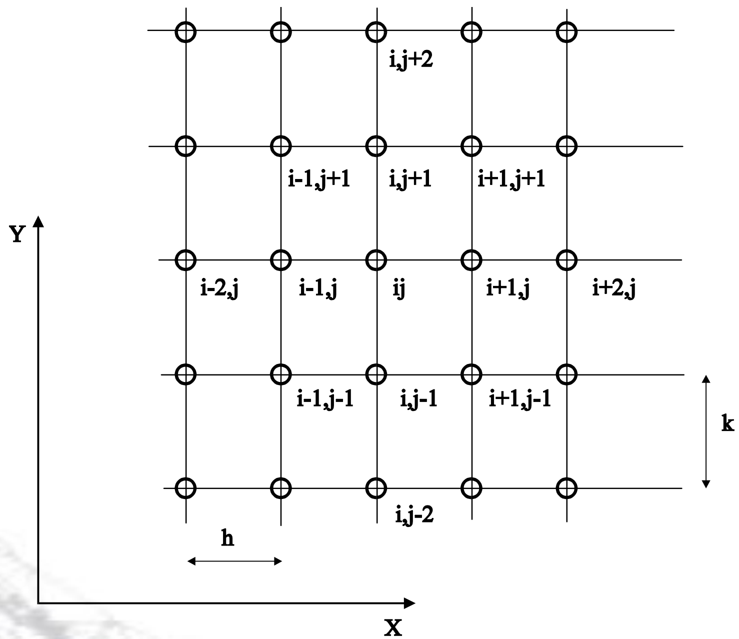
- Diferencias finitas
- Funciones de prueba
- FEM
- BEM
- Métodos sin malla
- Volúmenes finitos

Problemas físicos

- **Discretos**: Sol. (analítica o numérica) sencilla
- **Continuos**: Sol. más compleja, analítica o numérica (mediante discretización)

1. Métodos numéricos para resolución de EDP

1.1.- Diferencias finitas



$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{ij} \cong \frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{h}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{ij} \cong \frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{k}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{ij} \cong \frac{f_{i+1,j}-2f_{i,j}+f_{i-1,j}}{h^2}$$

- Es difícil tratar con geometrías o condiciones de contorno complejas.
- Posible mal condicionamiento numérico.
- El algoritmo de resolución depende de la ecuación (es difícil de generalizar).

1. Métodos numéricos para resolución de EDP

1.1.- Diferencias finitas

Problema:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0$$

$$f(x) = 1$$

Solución general:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C + Dx$$

1. Métodos numéricos para resolución de EDP

1.2.- Método de las funciones de prueba

Aproximación para todo el dominio:

$$u(x,y) \approx \hat{u}(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + \ldots$$

Minimización de un funcional o residuos ponderados:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots$$

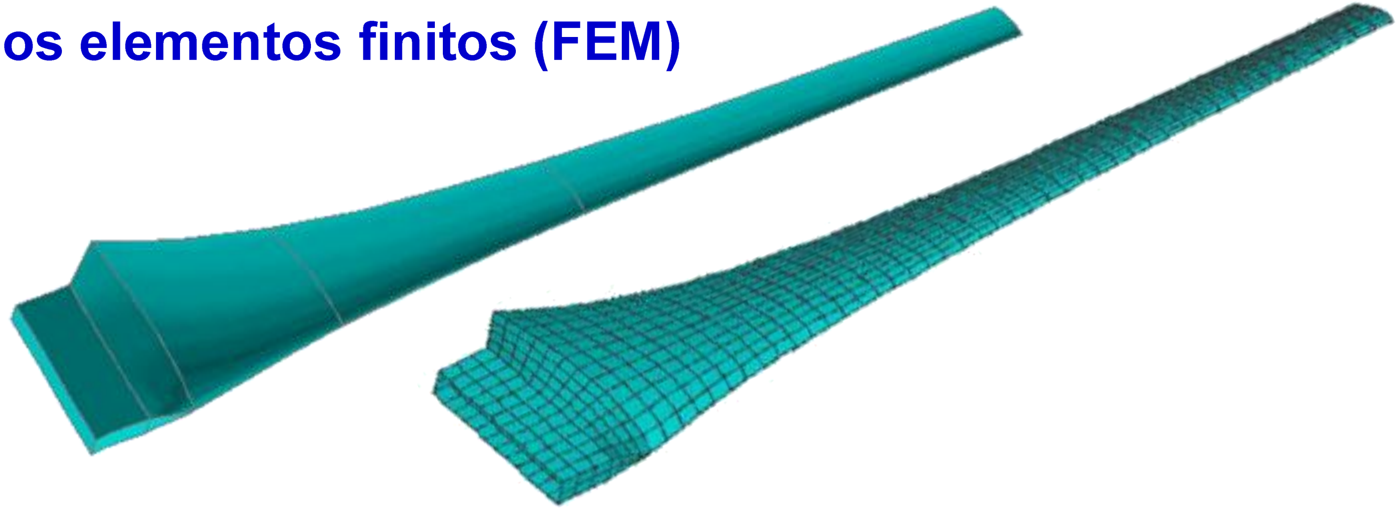
DESVENTAJAS:

- Solución única para todo el subdominio
  - $\Rightarrow$ puede requerir un número excesivo de términos
    - $\Rightarrow$ grado polinómico elevado,
      - $\Rightarrow$ posible mal condicionamiento numérico.
- Coeficientes a_i no son fácilmente interpretables.
- Difícil satisfacer condiciones de contorno generales.
- Matriz de coeficientes llena.

1.- Métodos numéricos para resolución de EDP

1.3.- Método de los elementos finitos (FEM)

Subdivisión en elementos:



Aproximación de la solución en cada elemento mediante *funciones de prueba*

Aplicación de (*ensamblado*)

- principio variacional, o
- método de los residuos ponderados

Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas

Postproceso y validación de los resultados numéricos

1.- Métodos numéricos para resolución de EDP

1.3.- Método de los elementos de contorno (BEM)

Transformación: ecuaciones diferenciales de dominio (D)

$\Downarrow$

integrales de frontera (D-1)

Subdivisión del contorno en elementos

Resolución del sistema de ecuaciones algebraicas

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

Ecs. **diferenciales**

↓

Planteamiento **a nivel global**
Ecs. **integrales**

→ **Enfoques**

- Variacional (energético)
- Residuos ponderados

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

La mejor forma de resolver cualquier problema físico gobernado por una ecuación diferencial es obtener la solución analítica.

Problemas:
•Frontera
•Multiplicidad de materiales
•Problemas no lineales
•Materiales anisotrópicos

Solución:
Desarrollar un método numérico para hallar la solución a un problema cuando no se puede hacer por medios analíticos.

La solución es aproximada, en puntos discretos del dominio. Pero es mejor que no tener nada.

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

2.1.- Planteamiento variacional

Encontrar una formulación en la que una ecuación diferencial se recalcula en una integral equivalente ponderando la ecuación diferencial de la variable dependiente y una función de prueba (buscando un máximo o un mínimo).

Evaluación de un funcional en función de los coeficientes incógnita

$$\Pi \approx \hat{\Pi}(a_1,..,a_m) \qquad j=1,..,m$$

Condición de estacionariedad del funcional

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial a_i} = 0 \qquad j=1,..,m$$

Enfoque variacional en el problema elástico. Opciones:

Obtención de desplazamientos

- Por el **Principio de Trabajos Virtuales**
- $\boxed{\textbf{Minimizando la Energía Potencial Total}}$
- Otros

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

2.2.- Residuos ponderados

Ecuación diferencial $L(u)+f=0$

u campo incógnita exacto
L operador diferencial
A Dominio
f función definida en A

Residuo $R(u)=L(u)+f$

Forma integral $W(u)=\int_A \Psi R(u)dA$

Ψ función de ponderación

Residuo y forma integral para $\hat{u}$

$$R(\hat{u})=L(\hat{u})+f$$

$$W(\hat{u})=\int_A \Psi R(\hat{u})dA$$

$\hat{u}$ campo incógnita aproximado

Forma integral para selección de Ψ's

$$W_j(\hat{u})=\int_A \Psi_j R(\hat{u})dA=W_j(a_1,..,a_m) \qquad j=1,..,m$$

$a_1,\dots a_m$ coeficientes incógnita
Ψ_j funciones de ponderación

Anulación de forma integral $\forall\Psi_j$

$$W_j(a_1,..,a_m)=0 \qquad j=1,..,m$$

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

2.2.- Residuos ponderados

Colocación $$\Psi(x) = x - x_i$$

Subdominio $$\Psi(x) = 1,\ \Omega_i \subset \Omega$$

Galerkin $$\Psi(x) = h(x)$$

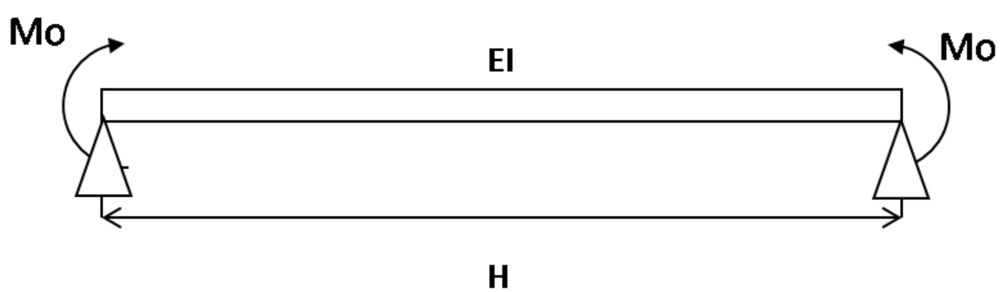
Mínimos cuadrados $$\Psi(x) = R(x)$$

$$\chi(x) = \int_0^H [R(x)]^2 \, dx$$

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

PROBLEMA

En la Figura se muestra una viga simplemente apoyada de longitud H y momentos concentrados en los extremos Mo, con módulo de elasticidad E , sección transversal de área A y momento de inercia I .



Las condiciones de frontera son y (0) = 0, y (H) = 0, donde y es la deflexión de la viga. La ecuación diferencial que gobierna el fenómeno físico es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} - M(x) = 0$$

2.- Diferentes enfoques del planteamiento del MEF

Una solución aproximada para la Ecuación podría ser:

$$y(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{H}\right)$$

donde A es un coeficiente a ser determinado. La ecuación satisface las condiciones de frontera de manera que y (0) = 0;0 y y (H) = 0;0 y su forma puede ser similar a la curva real de deflexión.
La solución exacta está dada por:

$$y(x) = \frac{Mox}{2EI}(x - H)$$

Aplicar cada uno de los métodos mostrados arriba para encontrar la solución al problema planteado.

3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

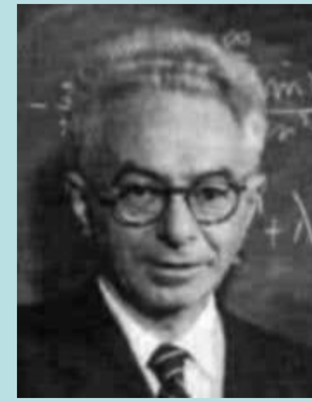
Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

Courant

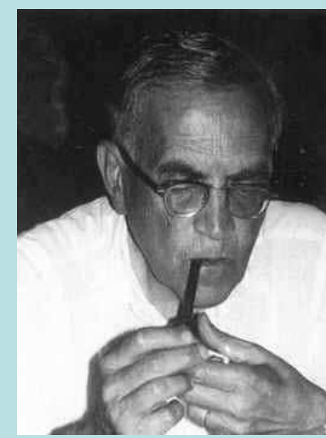
Resolución del problema de torsión con polinomios lineales en regiones trianguladas



Schoenberg

Teoría de SPLINES.

Recomienda el uso de polinomios definidos a tramos para aproximar e interpolar



3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros	
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark	Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp	Años Formativos
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung	Años maduración
1970				

Synge

Synge y Prager

Desarrollan el método del hipercírculo: Interpretación geométrica para los principios de mínimo de la teoría de elasticidad

3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros	
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark	Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp	Años Formativos
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung	Años maduración
1970				

Hrenikoff

El comportamiento elástico de una placa es equivalente al de un conjunto de elementos viga conectados entre si

$\Rightarrow$ **Resolución con métodos de estructuras de barras**

McHenry y Newmark

Refinan esta idea

3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros	
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark	Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp	Años Formativos
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung	Años maduración
1970				

Polya

Polya, Herchs y Weisberger

Ideas similares a Courant (polinomios lineales sobre regiones trianguladas) para evaluar límites de valores propios

Greenstradt

Divide un dominio en *células*,

asigna una función diferente a cada una, y

aplica un principio variacional

3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

Synge

Usa funciones lineales sobre una región triangulada y un procedimiento variacional de Ritz

McMahon

Resuelve problema electrostático 3D con tetraedros y funciones lineales

3.- CRONOLOGÍA

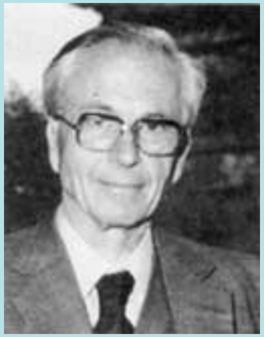
	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

Argyris



Langefors y Argyris

Reformulan el problema de análisis de estructuras a una forma matricial adaptada al calculo mediante ordenador

Turner, Clough, Martin y Top

Modelan aviones (3D) mediante ensamblado de paneles triangulares.

Considerable extension of the material presented in this paper is possible

3.- CRONOLOGÍA

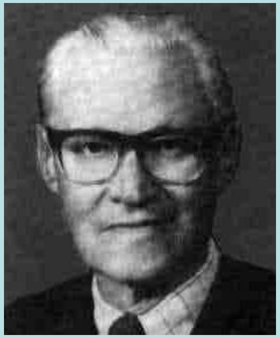
	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

Friedrichs



Friedrichs y White

Usan elementos triangulares y

principios variacionales

para desarrollar ecuaciones en diferencias finitas

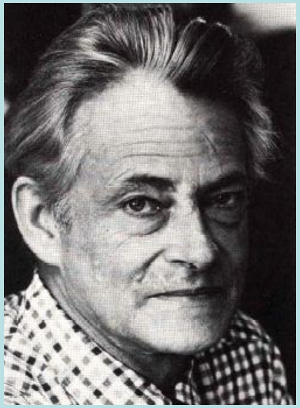
3.- CRONOLOGÍA

	Matemáticos	Físicos	Ingenieros	
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark	Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp	Años Formativos
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung	Años maduración
1970				

Clough

Aparece por primera vez el nombre de *ELEMENTOS FINITOS*

Fraejis de Veubeke



Melosh y Besseling
Jones y Fraejis de Veubeke

Muestran el MEF como un método variacional de Ritz usando funciones definidas a tramos

3.- CRONOLOGÍA

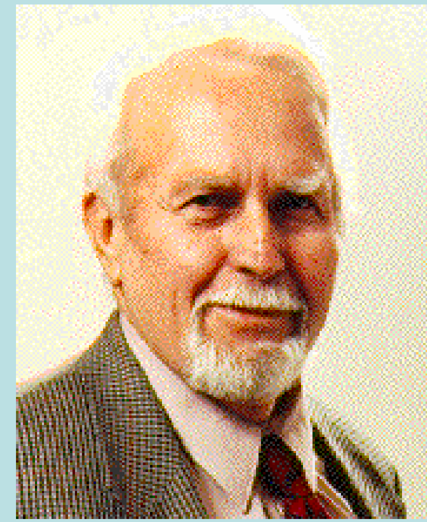
	Matemáticos	Físicos	Ingenieros
1940	Courant Schoenberg	Prager y Synge	Hrenikoff McHenry Newmark
1950	Polya Hersch Weisberger Greenstadt	Synge McMahon	Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp
1960	Friedrichs White		Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung
1970			

Génesis conceptos MEF e Introducción ordenadores

Años Formativos

Años maduración

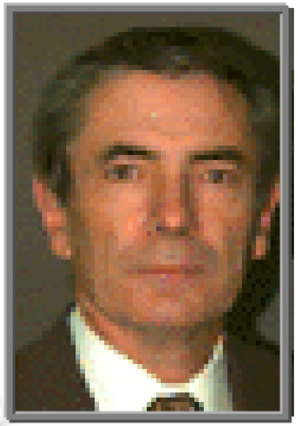
Zienkiewicz



Zienkiewicz y Cheung

Muestran que el MEF es aplicable a todos los problemas que se puedan definir en forma variacional

3.- CRONOLOGÍA. *Algunos investigadores en la actualidad*



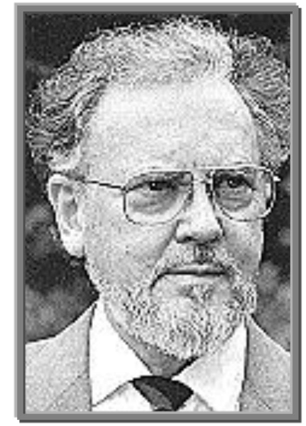
Owen

Babuska

Taylor

Laursen

Hughes



Stein

Belytschko

Wriggers

Wiberg

Ortiz

Peraire

Oñate