

FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y APLICACIONES

1. Introducción.

- 1.1. Métodos numéricos para resolución de EDP.
- 1.2. Diferentes enfoques para plantear el MEF.
- 1.3. Introducción histórica.

2. Planteamiento del MEF mediante residuos ponderados.

- 2.1. Introducción.
- 2.2. Residuo.
- 2.3. Método de los residuos ponderados.
- 2.4. Integración por partes.
- 2.5. Discretización.
- 2.6. Aproximación nodal.
- 2.7. Funciones de ponderación. Formulación de Galerkin.
- 2.8. Formulación matricial de la forma integral.
- 2.9. Ensamblado.
- 2.10. Condiciones de contorno esenciales.

3. Planteamiento variacional del MEF.

- 3.1. El problema elástico. Resolución de sistemas discretos.
- 3.2. Método de Rayleigh-Ritz.
- 3.3. Formulación en desplazamientos.
- 3.4. Requisitos de convergencia.

4. Interpolación. Funciones de forma de continuidad C^0 .

- 4.1. Introducción.
- 4.2. Formas básicas de elementos.
- 4.3. Interpolación nodal. Funciones de forma.
- 4.4. Propiedades de las funciones de forma.
- 4.5. Elementos unidimensionales.
- 4.6. Elementos bidimensionales.
- 4.7. Elementos tridimensionales.
- 4.8. Transformación de coordenadas.
- 4.9. Integración numérica.
- 4.10. Funciones de forma jerárquicas.

5. Solución aproximada del MEF.

- 5.1. Características de la solución y análisis de resultados.
- 5.2. Clasificación de errores.

6. Error de discretización y técnicas adaptativas.

- 6.1. Velocidad de convergencia del error de discretización.
- 6.2. Cuantificación del error de discretización.
- 6.3. Estimación del error de discretización mediante técnicas de alisado.
- 6.4. Reconstrucción del campo de tensiones.
- 6.5. Técnicas adaptativas.

7. Elementos estructurales para vigas y placas.

- 7.1. Elementos tipo viga.
- 7.2. Elementos tipo placa.

TEMA 1.-

**INTRODUCCIÓN AL
MÉTODO DE LOS
ELEMENTOS FINITOS.**

INDICE

| | |
|--|----------|
| INDICE | I |
| 1.- INTRODUCCIÓN. | 1 |
| 1.1.- MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS. | 2 |
| 1.2.- MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA. | 3 |
| 1.3.- MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM). | 3 |
| 1.4.- MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO (BEM) | 4 |
| 2.- DIFERENTES ENFOQUES DEL PLANTEAMIENTO DEL MEF | 5 |
| 2.1.- PLANTEAMIENTO MEDIANTE RESIDUOS PONDERADOS | 5 |
| 2.2.- PLANTEAMIENTO VARIACIONAL | 6 |
| 3.- INTRODUCCIÓN HISTÓRICA. | 7 |

1.- INTRODUCCIÓN.

Un problema de contorno es aquel que está gobernado por una o más ecuaciones diferenciales o integrales dentro de un dominio, y por condiciones de contorno en la frontera de dicho dominio. Como ejemplo, los problemas de análisis estructural están gobernados por las siguientes ecuaciones:

- (1) Relaciones deformaciones - desplazamientos.
- (2) Relaciones tensiones - deformaciones.
- (3) Ecuaciones de equilibrio.

En general, para resolver un problema de contorno, se puede utilizar uno de los siguientes métodos.

- a) Solución analítica. Generalmente no aplicable cuando la geometría no es muy simple.
- b) Solución aproximada. A efectos de aplicación ingenieril, si no es posible encontrar la solución exacta, basta con encontrar una solución aproximada en la que esté acotado el error cometido. Para el caso que nos ocupa, se pueden utilizar, entre otros, métodos de diferencias finitas, de elementos finitos o de elementos de contorno. De estos, el más utilizado en la actualidad es el de elementos finitos. No obstante ciertos tipos de problemas pueden ser tratados con mayor eficacia mediante diferencias finitas o elementos de contorno.

Los problemas físicos pueden clasificarse en dos categorías: Sistemas discretos y sistemas continuos. Considerando las leyes de la física, un problema de ingeniería se representa por:

- Un sistema discreto caracterizado por un conjunto de ecuaciones algebraicas que relacionan un número finito de incógnitas o grados de libertad (gdl).
- Un sistema continuo que está caracterizado por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con sus correspondientes condiciones de contorno. En ocasiones, es posible obtener una formulación equivalente en términos de ecuaciones integrales.

La solución del problema, en el primer caso es relativamente simple, ya que consiste en encontrar la solución (analítica o numéricamente) del sistema de ecuaciones algebraicas. En el segundo caso, la solución del problema es más compleja.

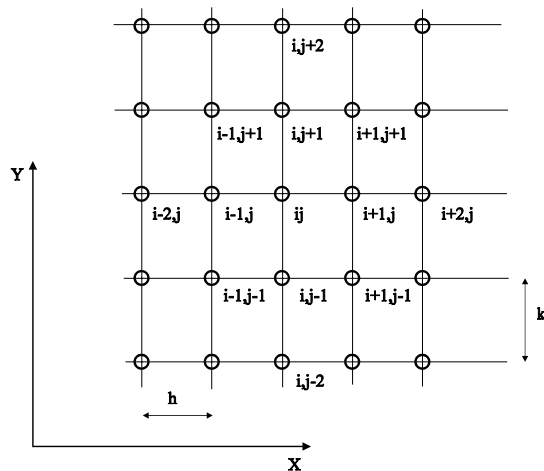
La mejor forma de resolver un problema gobernado por ecuaciones diferenciales es obtener la solución analítica. Sin embargo, existen muchas situaciones en que la solución analítica es difícil de obtener. Por ejemplo, el dominio de definición del problema puede ser complejo, las propiedades pueden variar dentro del mismo, o las condiciones de contorno pueden ser no simples.

Cuando no es posible encontrar la solución analítica hay que recurrir a una solución numérica (que es generalmente aproximada). El objetivo será encontrar una solución con un error inferior al admisible para su utilización en ingeniería. Existen diferentes

métodos aproximados para la resolución de ecuaciones diferenciales. Los más generales se pueden resumir en los siguientes:

1.1.- Método de las diferencias finitas.

En este caso, el dominio de definición del problema se discretiza en una serie de puntos, denominados nodos, y el valor de las derivadas de la función incógnita se determina en términos de su valor en los puntos que lo circundan utilizando un método de diferencias finitas. Por ejemplo, el valor de las derivadas de una función $f(x,y)$ evaluada en el punto ij puede aproximarse mediante



a) Malla regular de diferencias finitas.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{ij} \cong \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{ij} \cong \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{k}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{ij} \cong \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}$$

b) Aproximación de las derivadas

Figura 1.- Cronología del MEF.

Sustituyendo la aproximación de diferencias finitas en la ecuación diferencial para cada uno de los nodos de la malla obtendremos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son el valor de la función en los nodos.

Las dificultades básicas que aparecen en la utilización del método son las siguientes:

- Es difícil tratar con geometrías o condiciones de contorno complejas. La forma simple de plantear el método consiste en utilizar discretizaciones en puntos dispuestos regularmente, lo que no es fácil de realizar cuando el contorno es complejo.
- Puede ser necesario utilizar esquemas iterativos en la resolución del problema, dependiendo la estabilidad numérica de diversos parámetros. Las ecuaciones resultantes pueden estar mal condicionadas.
- El algoritmo de resolución depende del tipo de ecuación planteada y es difícil de generalizar.

En la actualidad se han desarrollado métodos de diferencias finitas apropiados para la utilización con mallas no regulares. Estos permiten tratar problemas con contornos complejos, y en general se han desarrollado para aplicaciones específicas. El método por lo tanto no es general.

1.2.- Método de las funciones de prueba.

Se supone que la solución del problema se puede expresar en función de un número finito de parámetros incógnita. Por ejemplo, en un problema bidimensional, podríamos suponer que la solución del problema se puede aproximar mediante un polinomio, definido para todo el dominio,

$$u(x, y) \approx \hat{u}(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + \dots$$

siendo los parámetros a determinar los coeficientes a_i . El grado del polinomio a considerar, y en consecuencia el número de coeficientes incógnitas, determinarán la precisión del resultado obtenido. Para encontrar tales parámetros se puede aplicar la condición de estacionariedad de un funcional (método de Raileigh-Ritz) o minimizar el error ponderado sustituyendo la aproximación en las ecuaciones diferenciales (método de los residuos ponderados). De la aplicación de estos métodos resulta un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los parámetros a_i .

Las desventajas de este método se pueden resumir en las siguientes:

- El suponer una única solución, válida para todo el dominio, puede requerir un número excesivo de términos, con un grado polinómico elevado, dando lugar posiblemente a errores computacionales elevados.
- Los coeficientes a_i del polinomio no son fácilmente interpretables desde el punto de vista físico.
- Es difícil satisfacer condiciones de contorno generales.
- En general, el sistema de ecuaciones resultante tiene una matriz de coeficientes llena. Esto significa que deberemos almacenar y operar con todos los términos de la matriz para resolver el sistema de ecuaciones. Por otra parte, en general la matriz de coeficientes estará bien condicionada, facilitando la resolución numérica del sistema de ecuaciones.

1.3.- Método de los elementos finitos (FEM).

En el MEF, el dominio se subdivide en un conjunto de subdominios (elementos finitos) definidos por los nodos que conecta. Para cada elemento se aproximan localmente las funciones incógnita, en general mediante funciones polinómicas, en función de un conjunto de variables discretas (por ejemplo, valor de la función incógnita en los nodos que definen el elemento, si la interpolación es nodal). Considerando la condición de estacionariedad de un funcional o un método de residuos ponderados se plantean las ecuaciones algebraicas correspondientes (ecuaciones de comportamiento aproximadas).

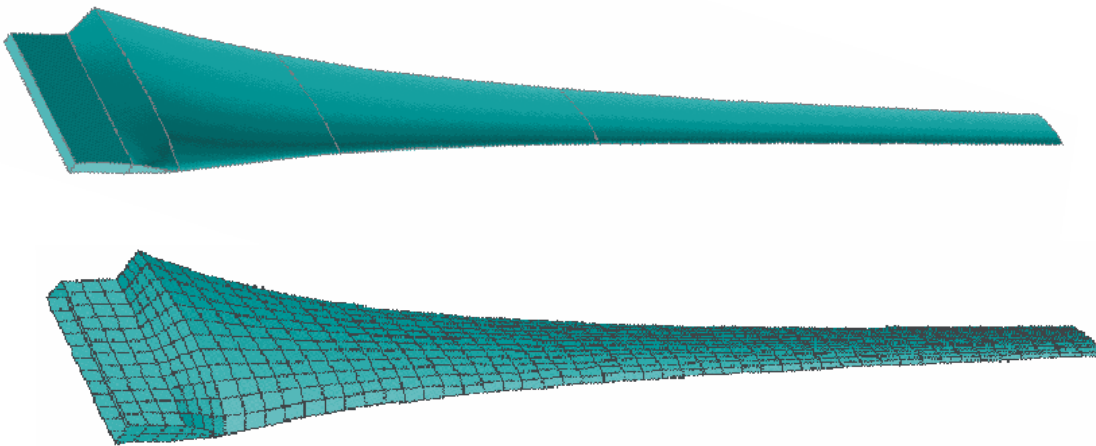


Figura 2.- Dominio y discretización del dominio en elementos.

De la solución de este problema, se obtiene el conjunto de variables discretas que definen la solución aproximada al problema planteado.

Las ecuaciones de comportamiento aproximadas pueden calcularse mediante ensamblado de las ecuaciones de comportamiento de cada elemento finito. Esto es una gran ventaja del método, ya que permite realizar gran parte de los cálculos de forma sistematizada.

En cierta forma puede considerarse que el método de los elementos finitos equivale a un método de las funciones de prueba considerando un soporte local (basado en elementos) de las mismas junto con un ensamblado de las ecuaciones locales.

1.4.- Método de los elementos de contorno (BEM)

En el método de los elementos de contorno, las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema se transforman en integrales definidas sobre la frontera del dominio. Puesto que el problema se expresa solamente como función de la solución en el contorno se consigue reducir en una las dimensiones del problema, siendo solamente necesario discretizar la frontera del dominio en elementos.

2.- DIFERENTES ENFOQUES DEL PLANTEAMIENTO DEL MEF

Como se ha indicado anteriormente, para plantear las ecuaciones algebraicas a partir de las cuales se obtendrá la solución aproximada del problema se pueden considerar los siguientes planteamientos alternativos:

- Aplicar un método de residuos ponderados.
- Aplicar la condición de estacionariedad de un funcional.

2.1.- Planteamiento mediante residuos ponderados

Consideremos un problema planteado mediante una ecuación diferencial, definida en un dominio A :

$$L(u)+f=0$$

Donde L es un operador diferencial y f una función definida sobre el dominio. Tendremos además unas condiciones de contorno, que por simplicidad en este momento no vamos a considerar. Para esta ecuación diferencial podemos definir la función residuo $R(u)$ como:

$$R(u)=L(u)+f$$

Consideremos ahora una función de ponderación Ψ , definida para el dominio. Para todo el dominio podemos definir la integral:

$$W(u)=\int_A \Psi R(u)dA$$

que es evidentemente nula si u es la función solución del problema. La función Ψ se denomina función de ponderación. Ahora, la solución de la ecuación diferencial se puede plantear como la búsqueda de la función u que anula la forma integral para cualquier función de ponderación Ψ .

Consideremos ahora la solución aproximada \hat{u} . En este caso, el residuo no será nulo, resultando:

$$R(\hat{u})=L(\hat{u})+f$$

$$W(\hat{u})=\int_A \Psi R(\hat{u})dA$$

Supongamos que la aproximación de la función u depende de m coeficientes a_i . Consideremos que se han elegido convenientemente m funciones de ponderación Ψ_j . Como la función aproximada depende de los coeficientes a_i , el residuo ponderado para cada función de ponderación será también función de los coeficientes, es decir:

$$W_j(\hat{u}) = \int_A \Psi_j R(\hat{u}) dA = W_j(a_1, \dots, a_m) \quad j=1, \dots, m$$

La solución aproximada del problema puede buscarse como aquella que anula el residuo ponderado para todas las funciones de ponderación (Ψ_j) seleccionadas, y por lo tanto consiste en calcular los coeficientes a_i a partir del sistema de ecuaciones:

$$W_j(a_1, \dots, a_m) = 0 \quad j=1, \dots, m$$

En general, cada una de estas ecuaciones dependerá de todos los coeficientes a_i . El sistema de ecuaciones resultante es lineal si la ecuación diferencial lo es. La solución encontrada es una solución aproximada, ya que hemos supuesto la forma de la misma (polinómica por ejemplo) y hemos anulado el residuo ponderado para un conjunto de m funciones de ponderación.

2.2.- Planteamiento variacional

En este segundo caso, la formulación integral da lugar a un planteamiento físico mucho más claro del problema, lo que ha hecho que tradicionalmente sea la forma más habitual de plantear el problema en el entorno de la Ingeniería Mecánica.

Esta alternativa para plantear las ecuaciones de elementos finitos consiste en utilizar un principio variacional para determinar las incógnitas del problema. Por ejemplo, en problemas elásticos resulta común utilizar el principio de mínima energía potencial total. Mediante este planteamiento se determina el valor aproximado de un funcional Π como función de las incógnitas a determinar:

$$\Pi \approx \hat{\Pi}(a_1, \dots, a_m) \quad j=1, \dots, m$$

Planteando la estacionariedad de dicho funcional con respecto a las incógnitas a determinar se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial a_i} = 0 \quad j=1, \dots, m$$

3.- INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) ha evolucionado gradualmente, en base a las contribuciones de ingenieros, matemáticos y físicos. Las ideas esenciales comenzaron a aparecer principalmente durante la década de los 40.

| | Matemáticos | Físicos | Ingenieros | |
|------|---|-------------------|---|------------------------------------|
| 1940 | Courant Schoenberg | Prager y Synge | Hrenikoff McHenry Newmark | Génesis de conceptos del MEF |
| 1950 | Polya Hersch Weisberger Greenstadt | Synge McMahon | Langefors Argyris Turner, Clough, Martin, y Topp | |
| 1960 | Friedrichs White | | Clough Melosh; Bessenling Jones; Fraeijs de Veubeke Zienkiewicz y Cheung | Años formativos |
| 1970 | | | | Años de maduración |

Figura 1.- Cronología del MEF.

El artículo de Courant en 1943 es un clásico. Aunque fue uno de los primeros, y pronto olvidados, detalla un enfoque similar al que apareció de nuevo a mediados de los 60. Para resolver el problema de torsión en elasticidad, define polinomios lineales sobre regiones trianguladas. El artículo de Schoenberg, en 1946, define el nacimiento de la teoría de los splines, recomendando la utilización de polinomios definidos a tramos para aproximación e interpolación. A mediados de los 50, Polya, Hersch y Weinberger utilizan ideas similares a las de Courant para estimar límites de valores propios. En 1959, Greenstadt divide un dominio en "células", asignando una función diferente a cada una de ellas, y aplica un principio variacional. White y Friedrichs utilizan elementos triangulares para desarrollar ecuaciones en diferencias a partir de principios variacionales.

En la comunidad de físicos, el trabajo de Prager y Synge conduce al desarrollo del método del hipercírculo, que proporciona una interpretación geométrica para los principios de mínimo de la teoría de elasticidad clásica. Synge utiliza funciones lineales definidas sobre una región triangulada conjuntamente con un procedimiento variacional

de Ritz. McMahon resuelve un problema tridimensional electrostático utilizando elementos tetraédricos y funciones lineales.

Entre los ingenieros, Hrenikoff propone la idea en 1941 de que el comportamiento elástico de una placa continua puede ser similar, bajo ciertas condiciones de carga, a un conjunto de elementos viga conectados entre sí en puntos discretos. El problema puede tratarse mediante métodos computacionales similares a los utilizados para estructuras de barras. McHenry y Newmark refinan posteriormente esta idea.

A partir de la introducción comercial de los computadores digitales a principio de la década de los 50, diversos investigadores, principalmente Langefors y Argyris mediante artículos publicados entre 1954 y 1955, reformulan el problema del análisis de estructuras a una forma matricial perfectamente adaptada para el cálculo eficiente por ordenador.

En 1956, Turner, Clough, Martin y Top sobrepasan el concepto de entramado de barras, modelando estructuras de aviones mediante el ensamblado de pequeños paneles de forma triangular. Es un avance conceptual importante ya que hace posible modelar de forma más realista estructuras bi y tridimensionales mediante el ensamblado de piezas similares. El resumen de su trabajo contenía una observación realmente profética, "Considerable extension of the material presented in this paper is possible."

En este momento se ensamblan todos los ingredientes: computadores, métodos matriciales, y el concepto de elemento. Los ingenieros reconocen rápidamente que están ante una nueva herramienta, rápida y potente. Esto quizá marca el comienzo del crecimiento rápido del MEF. En los siguientes 5 o 10 años existe una gran profusión de artículos relacionados con aplicaciones prácticas a estructuras de ingeniería civil y aeroespacial.

El nombre del método, "elementos finitos", aparece por primera vez en un artículo de Clough en 1960. Los trabajos de Melosh y Besseling en 1963, y el de Jones y Fraeijs de Veubeke en 1964 muestran que el MEF puede identificarse como una forma del método variacional de Ritz utilizando funciones definidas a tramos. En 1965 Zienkiewicz y Cheung mostraron que el MEF es aplicable a todos los problemas de campos que pueden ser definidos en forma variacional.

La época de mediados de los 60 se puede identificar con la transición de los años formativos al principio de la "era moderna". La primera década (mediados de los 50 a mediados de los 60) ha sido dominada por las aplicaciones estructurales a gran escala, y el enfoque se ha caracterizado por el concepto físico de imaginar la estructura descompuesta en piezas físicamente separadas.

A partir de mitad de la década de los 60 hasta el final de los 70, el MEF se difunde más allá del análisis estructural a otros campos de aplicación, y la tendencia es más matemática. Estos son los años de maduración, en los que por ejemplo aparecen alrededor de 7000 publicaciones en el año 1976. Los matemáticos comienzan a establecer los fundamentos con pruebas rigurosas de convergencia, límites del error, y estabilidad. Las técnicas se extienden por encima de los métodos variacionales para incluir residuos ponderados y principios de balance de energía globales. Los algoritmos numéricos se refinan. Se desarrollan los generadores automáticos de malla, la interacción, y otras capacidades de pre y postproceso.

En la actualidad el MEF es una de las técnicas mejor asentadas para la resolución de problemas de contorno que aparecen en la ingeniería. La tendencia actual es la de facilitar al usuario la resolución de problemas complejos. Los problemas no lineales (plasticidad, viscoelasticidad, contacto, etc.) pueden ser tratados con mayor facilidad y de forma más eficaz, y es posible resolver problemas combinados en los que interaccionan problemas que anteriormente eran tratados por separado (análisis tensional, térmico, interacción fluido - estructura, interacción estructural con campos magnéticos, etc.). Como la solución de elementos finitos es aproximada, es necesario estimar el error que se introduce. En los últimos años se ha realizado un avance considerable es el desarrollo de técnicas fiables y rápidas de estimación del error de discretización y técnicas de redefinición automática de la solución que permitan garantizar un error menor que el deseado, sin intervención por parte del usuario. En definitiva, la tendencia es a automatizar completamente el proceso de análisis, para que el usuario pueda dedicar mayor tiempo a la interpretación de resultados y estudio del problema que está analizando.

TEMA 2.-

**PLANTEAMIENTO DEL MEF
MEDIANTE RESIDUOS
PONDERADOS.**

INDICE

| | |
|---|---|
| INDICE | I |
| 1.- INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2.- RESIDUO | 1 |
| 3.- EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS | 2 |
| 4.- INTEGRACIÓN POR PARTES | 2 |
| 5.- DISCRETIZACIÓN..... | 4 |
| 6.- APROXIMACIÓN NODAL | 5 |
| 7.- FUNCIONES DE PONDERACIÓN. FORMULACIÓN DE GALERKIN | 5 |
| 8.- PLANTEAMIENTO MATRICIAL DE LA FORMA INTEGRAL | 5 |
| 8.1.- DEFINICIONES | 5 |
| 8.2.- DESARROLLO..... | 6 |
| 9.- ENSAMBLADO..... | 8 |
| 10.- CONDICIONES DE CONTORNO ESENCIALES | 9 |

1.- INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo presentaremos la metodología seguida en la resolución numérica de una ecuación diferencial en derivadas parciales, mediante la aplicación del método de los elementos finitos.

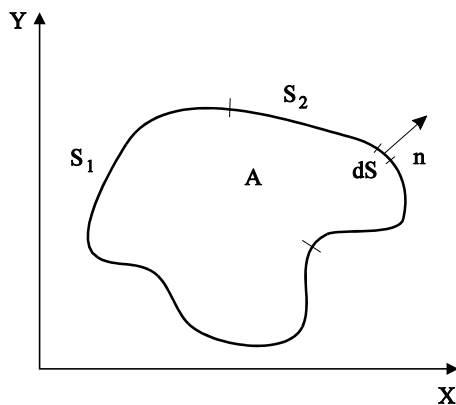
Cada uno de los pasos efectuados se ilustrará con su aplicación sobre la ecuación diferencial lineal de segundo orden genérica:

$$D_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - G u + Q = 0 \quad (1)$$

definida en un dominio $A \in \mathbb{R}^2$, cuya frontera denotaremos por S , con condiciones de contorno dadas por:

$$\begin{cases} u = \tilde{u} & \text{en } S_1 \text{ (cond. contorno tipo Dirichlet)} \\ D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y = q & \text{en } S_2 \text{ (cond. contorno tipo Neumann)} \end{cases} \quad (2)$$

siendo $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $S_1 \cup S_2 = S$, n_x y n_y las componentes del vector unitario normal al contorno S_2 , y donde $u(x,y)$ es la incógnita del problema, con D_x , D_y , G y Q constantes, o a lo sumo funciones de x e y pero no de u , puesto que si así fuera, el problema no sería lineal.



2.- RESIDUO

Se define el residuo como el valor que ofrece la ecuación diferencial cuando se sustituye en la misma un campo arbitrario $u^*(x,y)$, y lo denotaremos por $R(u^*)$. Obviamente se tendrá que siendo u la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} R(u^*) &= 0 & \text{si } u^* &= u \\ R(u^*) &\neq 0 & \text{si } u^* &\neq u \end{aligned} \quad (3)$$

Luego puede entenderse que resolver la ecuación es lo mismo que hacer que el residuo sea nulo.

Para la ecuación diferencial considerada, el residuo será:

$$R(u^*) = D_x \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - G u^* + Q \quad (4)$$

3.- EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

El método consiste en buscar la anulación del residuo exigiendo la anulación de la forma integral:

$$W(u) = \int_A \Psi R(u) dA = 0 \quad (5)$$

donde la función Ψ se conoce con el nombre de función de ponderación o función de peso.

Sólo en el caso en que se verifique la ecuación 5 con independencia de la función Ψ que se tome, esto es

$$W(u) = \int_A \Psi R(u) dA = 0 \quad (6)$$

para toda Ψ

será equivalente buscar la función u que verifique la ecuación diferencial, haciendo nulo el residuo 3, o buscar la función que verifique 6.

La forma integral del residuo ponderado correspondiente al ejemplo planteado es:

$$W(u) = \int_A \left(D_x \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_y \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - G \Psi u + \Psi Q \right) dA \quad (7)$$

4.- INTEGRACIÓN POR PARTES

En general, y por razones que en el próximo punto se pondrán de manifiesto, conviene proceder a integrar por partes la forma integral 6 hasta que el orden de derivación sobre la función Ψ y sobre la función u se igualen.

Considerando la ecuación diferencial planteada y suponiendo que D_x , D_y son constantes:

-Integrando por partes el término integral con segundas derivadas en x una sola vez respecto a x , resulta:

$$\iint D_x \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \Psi \quad du = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \\ dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad v = \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right\} =$$

$$= - \iint D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int D_x \Psi \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

-Integrando por partes el término integral con segundas derivadas en y una sola vez respecto a y, resulta:

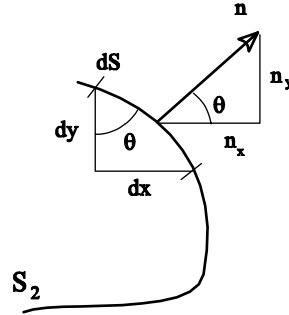
$$\iint D_y \Psi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy = \left\{ \begin{array}{l} u = \Psi \quad du = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \\ dv = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} =$$

$$= - \iint D_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \int D_y \Psi \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

-Si denotamos por n_x y n_y a las componentes del vector unitario \mathbf{n} , en la dirección normal exterior al contorno S , que también se pueden expresar como $\cos\theta$ y $\sin\theta$ respectivamente, se tendrá

$$dx = dS \sin \theta = n_y dS$$

$$dy = dS \cos \theta = n_x dS$$



Resultando de la agrupación de las integrales de contorno

$$\int D_x \Psi \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int D_y \Psi \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_S \Psi \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS$$

De este modo, se llega finalmente a la expresión

$$W(u) = - \int_A \left(D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + D_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \Psi G u - \Psi Q \right) dA +$$

$$+ \int_S \Psi \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \quad (8)$$

Como la función de ponderación Ψ es arbitraria, podemos elegirla de forma que se anule sobre la parte del contorno S_1 . De este modo,

$$\int_S \Psi \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS = \int_{S_2} \Psi \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS$$

y, dado que en la frontera S_2 se tiene la condición de contorno dada por 2, la ecuación anterior se simplificará, resultando

$$\int_S \Psi \left(D_x \frac{\partial u}{\partial x} n_x + D_y \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS = \int_{S_2} \Psi q dS \quad (9)$$

y finalmente, la ecuación 8 resultará:

$$W(u) = - \int_A \left(D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + D_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \Psi G u - \Psi Q \right) dA + \int_{S_2} \Psi q dS \quad (10)$$

5.- DISCRETIZACIÓN

La división del dominio en una serie de subdominios disjuntos recubriendo el dominio original, propio de la técnica de elementos finitos, nos lleva a considerar la forma integral $W(u)$ como la suma de las formas integrales particularizadas a cada subdominio o elemento finito. Este resultado es inmediato a partir de las propiedades de la integral. No obstante, la interpolación de elementos finitos que posteriormente se aplique deberá cumplir ciertas condiciones de continuidad para que esto sea cierto.

Suponiendo, por lo tanto, el dominio A descompuesto en N_e elementos, se tendrá:

$$W(u) = \sum_{e=1}^{N_e} W^e(u) \quad (11)$$

donde $W^e(u)$ resulta

$$W^e(u) = - \int_{A^e} \left(D_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + D_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \Psi G u - \Psi Q \right) dA + \int_{S_2 \cap S^e} \Psi q dS \quad (12)$$

siendo S^e el contorno del elemento A^e .

Puesto que $W^e(u)$, al integrar sobre A^e , sólo hace intervenir la solución u en el elemento A^e , que denotaremos por u^e , y análogamente para la función de ponderación, podemos igualmente escribir

$$W^e(u) = - \int_{A^e} \left(D_x \frac{\partial \Psi^e}{\partial x} \frac{\partial u^e}{\partial x} + D_y \frac{\partial \Psi^e}{\partial y} \frac{\partial u^e}{\partial y} + \Psi^e G u^e - \Psi^e Q \right) dA + \int_{S_2 \cap S^e} \Psi^e q dS \quad (13)$$

donde u^e hace referencia a la solución u en el elemento A^e , y de forma análoga para Ψ^e .

Cuando en cada elemento, la solución u^e sea aproximada, se requerirá que la aproximación permita mantener la continuidad entre elementos, puesto que de lo contrario no resultaría correcta la equivalencia dada por la ecuación 11 considerando $W^e(u)$ dada por la ecuación 13.

6.- APROXIMACIÓN NODAL

Si en cada elemento se efectúa una aproximación nodal a partir de n nodos, resultará

$$u^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u^e(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i^e \quad (14)$$

En escritura matricial puede representarse como

$$u^e(x, y) = [N] \{u^e\} \quad (15)$$

donde $[N]$ representa el vector de las funciones de forma transpuesto y $\{u^e\}$ el vector que contiene el valor de la función incógnita en los nodos del elemento considerado.

7.- FUNCIONES DE PONDERACIÓN. FORMULACIÓN DE GALERKIN

Como se comentó con anterioridad, las funciones Ψ son a priori arbitrarias. Cuando esta función, Ψ^e , en un elemento e se aproxima en la misma base que la función incógnita u^e , se dice que la formulación es de Galerkin. En este caso, podemos escribir

$$\Psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \Psi^e(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \Psi_i^e \quad (17)$$

que matricialmente puede representarse por

$$\Psi^e(x, y) = [N] \{\Psi^e\} \quad (18)$$

donde $[N]$ es el vector de funciones de forma transpuesto del elemento y $\{\Psi^e\}$ es el vector que contiene los valores nodales de la función de peso en el elemento considerado.

8.- PLANTEAMIENTO MATRICIAL DE LA FORMA INTEGRAL

8.1.- Definiciones

-Definimos el operador $[L]$ como:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

-Definimos la matriz $[D]$ como:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix} \quad (21)$$

-Definimos la matriz [B] como:

$$[B] = [L][N] \quad (22)$$

8.2.- Desarrollo

Partiendo de la forma integral para el elemento e dada por la ecuación (13), se tendrá, considerando las definiciones anteriores:

$$W_1^e(u) = - \int_{A^e} (D_x \frac{\partial \Psi^e}{\partial x} \frac{\partial u^e}{\partial x} + D_y \frac{\partial \Psi^e}{\partial y} \frac{\partial u^e}{\partial y}) dA = - \int_{A^e} \left(([L]\Psi^e)^T [D] ([L]u^e) \right) dA$$

Utilizando la aproximación nodal de la función Ψ^e y de la función u^e , indicadas en el punto anterior, resulta

$$W_1^e(u) = - \int_{A^e} \left(([L][N]\{\Psi^e\})^T [D] ([L][N]\{u^e\}) \right) dA$$

que reordenando, habida cuenta de que las componentes de los vectores $\{\Psi^e\}$ y $\{u^e\}$ son valores nodales, siendo por lo tanto constantes, resulta

$$W_1^e(u) = - \{\Psi^e\}^T \left\{ \int_{A^e} ([B]^T [D] [B]) dA \right\} \{u^e\} = \{\Psi^e\}^T [k_1^e] \{u^e\} \quad (23)$$

Por otra parte, definiendo $W_2^e(u)$

$$W_2^e(u) = - \int_{A^e} G \Psi^e u^e dA \quad (24)$$

aproximando nodalmente las funciones Ψ^e y u^e , obtenemos

$$W_2^e(u) = - \{\Psi^e\}^T \left\{ \int_{A^e} G [N]^T [N] dA \right\} \{u^e\} = \{\Psi^e\}^T [k_2^e] \{u^e\} \quad (25)$$

Definiendo $W_3^e(u)$

$$W_3^e(u) = \int_{A^e} Q \Psi^e dA \quad (26)$$

resultará análogamente

$$W_3^e(u) = \{\Psi^e\}^T \left\{ \int_{A^e} Q [N]^T dA \right\} \{u^e\} \quad (27)$$

Finalmente, la integral de contorno tiene una contribución en el elemento e dada por la forma integral $W_4^e(u)$ definida por

$$W_4^e(u) = \int_{S_2 \cap S^e} \Psi^e q \, dS = \{\Psi^e\}^T \left\{ \int_{S_2 \cap S^e} q [N]^T \, dS \right\} = \{\Psi^e\}^T \{f_4^e\} \quad (28)$$

La forma integral del elemento e, $W^e(u)$, resultará de

$$W^e(u) = W_1^e(u) + W_2^e(u) + W_3^e(u) + W_4^e(u) \quad (29)$$

Efectuando ahora los productos de matrices e integraciones que aparecen en las expresiones de las diferentes formas integrales parciales, resulta

$$W_1^e(u) = \{\Psi^e\}^T [k_1^e] \{u^e\} \quad (30)$$

$$\text{con : } [k_1^e] = - \int_{A^e} ([B]^T [D] [B]) \, dA \quad (31)$$

$$W_2^e(u) = \{\Psi^e\}^T [k_2^e] \{u^e\} \quad (32)$$

$$\text{con : } [k_2^e] = - \int_{A^e} G [N]^T [N] \, dA \quad (33)$$

$$W_3^e(u) = \{\Psi^e\}^T \{f_3^e\} \quad (34)$$

$$\text{con : } \{f_3^e\} = \int_{A^e} Q [N]^T \, dA \quad (35)$$

$$W_4^e(u) = \{\Psi^e\}^T \{f_4^e\} \quad (36)$$

$$\text{con : } \{f_4^e\} = \int_{S_2 \cap S^e} q [N]^T \, dS \quad (37)$$

Sumando ahora estas expresiones, se obtendrá, de acuerdo con 29, la expresión matricial de la forma integral $W^e(u)$

$$W^e(u) = \{\Psi^e\}^T \left(([k_1^e] + [k_2^e]) \{u^e\} + \{f_3^e\} + \{f_4^e\} \right)$$

resultando finalmente la expresión

$$W^e(u) = \{\Psi^e\}^T \left([k^e] \{u^e\} + \{f^e\} \right) \quad (38)$$

9.- ENSAMBLADO

Obtenida la forma integral de cada elemento e según lo visto en el anterior punto, resta ahora efectuar la operación de ensamblado de los elementos, según

$$W(u) = \sum_{e=1}^{Ne} W^e(u) = 0$$

Supongamos el número total de nodos en el dominio igual a M , y sea la expresión de la forma integral elemental genérica $W^e(u)$

$$W^e(u) = \{\Psi^e\}^T \left([k^e] \{u^e\} + \{f^e\} \right) \quad (39)$$

En la anterior expresión sólo están involucrados los valores nodales de la función Ψ y u correspondientes a los nodos del elemento e .

Definiendo ahora los vectores con las variables nodales de todo el dominio $\{U\}$ y $\{\Psi\}$, debemos expandir la matriz de coeficientes $[k^e]$ y el vector $\{f^e\}$ dando lugar a $[K^e]$ y el vector $\{F^e\}$ respectivamente.

El elemento de $[k^e]$ situado en la fila i , columna j , multiplica de acuerdo a la ecuación 39 a la i -ésima componente de $\{\Psi^e\}$ y a la j -ésima de $\{u^e\}$, de modo que se deberá posicionar en $[K^e]$, en la fila asociada al número de nodo correspondiente a la componente i -ésima de $\{\Psi^e\}$, y en la columna asociada al número de nodo correspondiente a la componente j -ésima de $\{u^e\}$. Análogamente, se procederá en la expansión de $\{f^e\}$, posicionando la componente i -ésima del vector $\{f^e\}$ en la fila de $\{F^e\}$ asociada al número de nodo correspondiente a la componente i -ésima de $\{\Psi^e\}$.

El ensamblado ofrece

$$\begin{aligned} W(u) &= \sum_{e=1}^{Ne} W^e(u) = \\ &= \{\Psi\}^T \left(\left(\sum_{e=1}^{Ne} [K^e] \right) \{U\} + \left(\sum_{e=1}^{Ne} [F^e] \right) \right) = \\ &= \{\Psi\}^T ([K]\{U\} + \{F\}) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Podría pensarse que dado que la anterior expresión es válida con independencia de la función de peso Ψ , y por lo tanto de sus valores nodales recogidos en el vector $\{\Psi\}$, ésta conduciría al sistema algebraico de ecuaciones

$$[K]\{U\} + \{F\} = \{0\} \quad (41)$$

Pero esto todavía no es cierto, puesto que como ya vimos la función de ponderación Ψ se toma de modo que se anula sobre la parte del contorno S_1 , con lo cual para todos los nodos situados sobre esta parte del contorno los valores nodales del vector $\{\Psi\}$ resultan nulos. Así, si n_1 es el número de nodos que hay sobre S_1 , en el sistema 41 existirán n_1 ecuaciones linealmente dependientes. Este problema queda solventado al introducir las condiciones de contorno de u sobre S_1 que pasamos a analizar en el punto siguiente.

10.- CONDICIONES DE CONTORNO ESENCIALES

En este punto vamos a proceder a introducir las condiciones de contorno de Dirichlet, es decir las asociadas al valor de u sobre el contorno S_1 , puesto que las condiciones de contorno sobre la frontera S_2 están implícitas en la formulación como se ha puesto de manifiesto a lo largo del tema.

Para la imposición de éstas condiciones basta eliminar del sistema algebraico 41 las ecuaciones asociadas a los nodos donde el valor de la función Ψ resulta nulo, sustituyéndolas por una ecuación que exprese que en dicho nodo el valor de la función incógnita u está impuesto.

Si suponemos que en el nodo j es conocido el valor de la función incógnita, esto es

$$u(x_j, y_j) = \tilde{u}_j \quad (42)$$

Procederemos eliminando del sistema algebraico de ecuaciones 41 la ecuación j -ésima, lo cual se lleva a cabo poniendo a cero todas las entradas de la fila j en la matriz $[K]$, salvo la correspondiente a la columna j en la que pondremos un 1. Por otra parte, en la fila j del vector $\{F\}$ pondremos el valor de \tilde{u}_j . De este modo, la nueva ecuación j -ésima resultante de 41 reproduce la ecuación 42.

Este procedimiento se debe repetir para todos los nodos donde el valor de la función u esté especificado.

TEMA 3.-

**PLANTEAMIENTO
VARIACIONAL
DEL M.E.F.**

ÍNDICE

| | |
|--|-----------|
| ÍNDICE..... | I |
| 1.- EL PROBLEMA ELÁSTICO. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DISCRETOS..... | 1 |
| 1.1.- REVISIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE ELASTICIDAD..... | 1 |
| 1.1.1.- ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTICIDAD..... | 2 |
| 1.2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO..... | 8 |
| 1.3.- SISTEMAS DISCRETOS..... | 11 |
| 1.3.1.- ECUACIONES DE ELEMENTO..... | 12 |
| 1.3.2.- ENSAMBLADO DE ELEMENTOS..... | 13 |
| 1.3.3.- PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL..... | 16 |
| 1.3.4.- APLICACIÓN DE CONDICIONES DE CONTORNO. RESOLUCIÓN EN DESPLAZAMIENTOS..... | 17 |
| 2.- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ..... | 18 |
| 3.- FORMULACIÓN EN DESPLAZAMIENTOS..... | 21 |
| 3.1.- MATRICES DE ELEMENTO K^E Y VECTORES FUERZA EQUIVALENTE F^E | 21 |
| 3.2.- CÁLCULO DE TENSIONES..... | 26 |
| 4.- REQUISITOS DE CONVERGENCIA..... | 28 |

1.- EL PROBLEMA ELÁSTICO. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DISCRETOS

1.1.- Revisión de conceptos básicos de elasticidad

La teoría de la Elasticidad trata los conceptos fundamentales, definiciones, y ecuaciones utilizadas en el análisis de tensiones y deformaciones. Estos fundamentos se utilizan en la resolución de problemas por métodos clásicos o mediante elementos finitos. La teoría de la elasticidad establece las condiciones que debe satisfacer la solución exacta y además ayuda a establecer el rango de aplicabilidad de soluciones aproximadas. Se utilizará un sistema de coordenadas cartesiano ya que es el más usual.

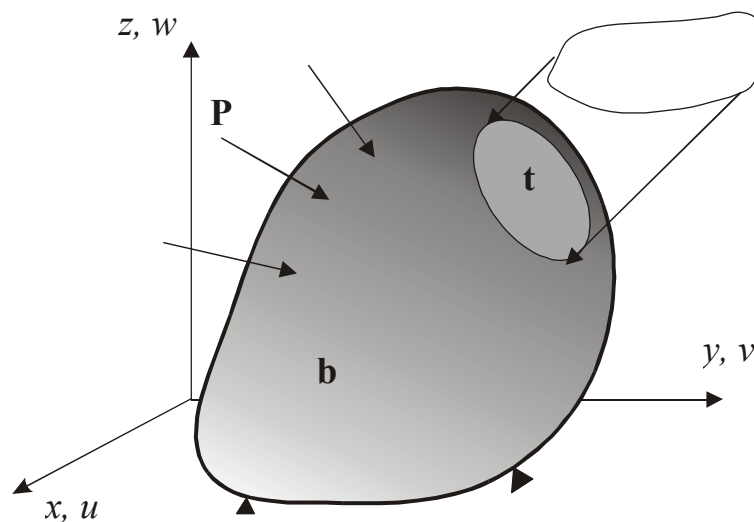


Figura 1.- Cuerpo elástico y fuerzas actuantes.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo elástico cualquiera (ver Figura 1) se pueden subdividir en volumétricas, superficiales y puntuales. Las fuerzas volumétricas se definen como fuerzas por unidad de volumen (por ejemplo, las gravitatorias, las debidas a aceleraciones centrífugas conocidas, etc.) y se pueden definir mediante un vector de funciones que denominaremos \mathbf{b} . En un problema tridimensional, el vector \mathbf{b} tendrá tres componentes, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$ y sus unidades serán de fuerza por unidad de volumen. También pueden actuar fuerzas por unidad de superficie. Al vector que define tales fuerzas lo denominaremos \mathbf{t} . En el caso tridimensional, el vector \mathbf{t} , que es función de las coordenadas, tendrá tres componentes, $\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T$. Las fuerzas puntuales son una simplificación de las fuerzas superficiales que actúan en una superficie muy pequeña a efectos del análisis que queremos realizar. Al vector que define todas las fuerzas puntuales aplicadas lo denominaremos \mathbf{P} .

Bajo la acción de estas fuerzas, y considerando las condiciones de soporte (contorno), el cuerpo elástico se deformará, desplazándose cada uno de sus puntos. Al vector que define los desplazamientos de cada uno de los puntos del cuerpo elástico lo

denominaremos \mathbf{u} , y en el caso tridimensional tendrá tres componentes, $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$, funciones de las coordenadas, según la dirección de los tres ejes coordenados.

El problema por lo tanto consiste en calcular los desplazamientos de todos los puntos del cuerpo elástico, así como otras magnitudes como pueden ser las tensiones y deformaciones que aparecen.

Para plantear el problema elástico existen básicamente dos enfoques. El primero de ellos consiste en plantear las relaciones que deben satisfacerse en cualquier punto del continuo. Este enfoque es el denominado planteamiento diferencial. En el segundo enfoque, se busca encontrar las ecuaciones que deben satisfacerse a nivel global. Este segundo enfoque es el que se utiliza cuando se consideran los principios variacionales. Ambos enfoques del problema elástico son útiles para el planteamiento del problema mediante elementos finitos, si bien la utilización de principios variacionales facilita la obtención de las ecuaciones.

1.1.1.- Ecuaciones básicas de la Elasticidad

1.1.1.1.- Definición de deformación

En la Figura 2 se muestra un elemento diferencial en dos dimensiones. Las líneas perpendiculares 01 y 02 representan la situación no deformada. Como resultado de la deformación, las líneas se convierten en 0'1' y 0'2'. Por definición, la deformación normal es la relación entre el cambio de longitud con respecto a la longitud original. De esta forma:

$$\varepsilon_x = \frac{L_{0'1'} - L_{01}}{L_{01}} = \frac{\left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

De forma similar, obtendremos la deformación normal en la dirección y:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2)$$

La definición en ingeniería de la deformación tangencial está basada en la variación del ángulo recto. Como los incrementos de desplazamientos son pequeños, $\beta_1 \approx \text{tg}\beta_1$ y $\beta_2 \approx \text{tg}\beta_2$. De esta forma, la deformación tangencial ingenieril se define como:

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u}{dy} + \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

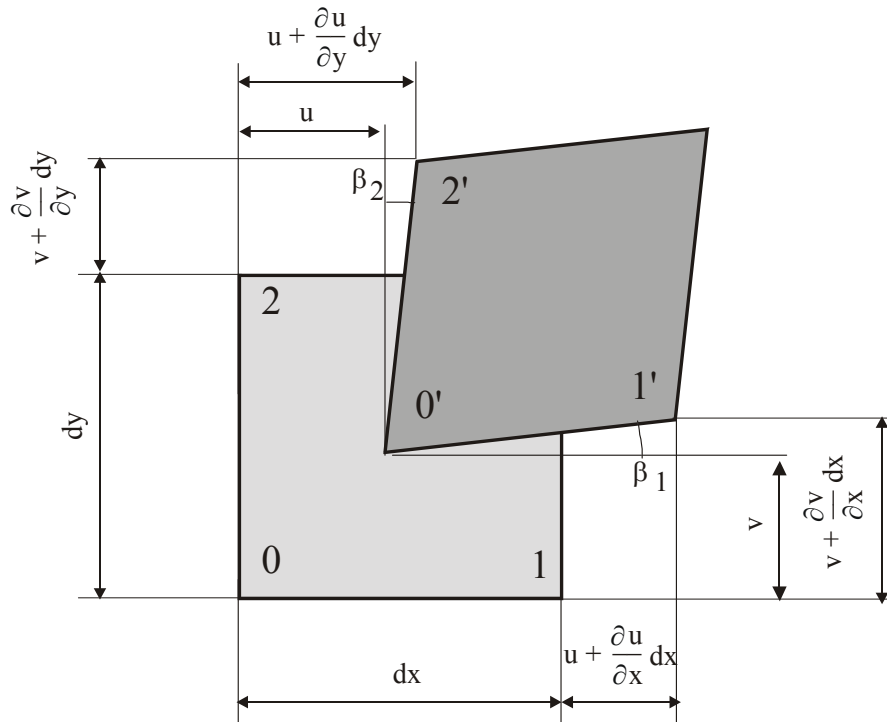


Figura 2.- Desplazamientos y distorsiones de las longitudes diferenciales dx y dy

Resumiendo los resultados, en dos dimensiones tenemos las siguientes relaciones entre deformaciones y desplazamientos.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

En tres dimensiones, con w como desplazamiento en la dirección z , un análisis similar conduce a las ecuaciones anteriores junto con las siguientes.

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

donde u , v y w son funciones en este caso de x , y y z . Las relaciones anteriores pueden expresarse mediante un operador matricial. En dos o tres dimensiones resulta:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (6)$$

La matriz \mathbf{L} es un operador que relaciona el campo de desplazamientos del cuerpo elástico con el campo de deformaciones.

1.1.1.2.- Relaciones tensiones-deformaciones

Denotaremos los vectores que definen los campos de tensiones y deformaciones como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \end{aligned} \quad (7)$$

No considerando el efecto de los cambios de temperatura, que se tratará posteriormente, las relaciones tensión – deformación del tipo más general, son

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8)$$

donde \mathbf{C} es una matriz simétrica de flexibilidades de material, \mathbf{D} una matriz simétrica de rigideces de material o de elasticidad, y $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$. Si las matrices \mathbf{C} y \mathbf{D} son de coeficientes constantes, tendremos el caso elástico lineal. En el caso más general de anisotropía, \mathbf{C} y \mathbf{D} contienen 21 coeficientes independientes, considerando que ambas matrices son simétricas.

Un material ortótropo es un material anisótropo que presenta valores extremos de rigidez en direcciones perpendiculares. Estas direcciones se llaman principales del material. Si x, y, z son las direcciones principales, las tensiones normales σ_x, σ_y y σ_z son independientes de las deformaciones tangenciales γ_{xy}, γ_{yz} y γ_{zx} . Para un material ortótropo la matriz \mathbf{D} contiene únicamente nueve coeficientes independientes.

Un material isótropo no tiene direcciones preferentes. Las propiedades de material se expresan usualmente en base a las dos siguientes propiedades: módulo de elasticidad E y coeficiente de Poisson ν . En la parte triangular superior, la matriz \mathbf{D} contiene 12 coeficientes nulos y 9 coeficientes no nulos.

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

El término *tensiones iniciales* define las tensiones que existen antes de la aplicación de las fuerzas exteriores aplicadas, y deben superponerse a las tensiones generadas por dichas fuerzas (solo válido para elasticidad lineal). Con la adición de las tensiones iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0$ y de las deformaciones iniciales $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, la ecuación 21 queda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (10)$$

Como ejemplos, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ puede representar la deformación térmica previa y $\boldsymbol{\sigma}_0$ tensiones residuales. Alternativamente, ambos efectos pueden ser descritos por $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, o $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ y $\boldsymbol{\sigma}_0$ pueden ser vistos como formas alternativas para expresar la misma situación.

Las condiciones de trabajo de un componente pueden dar lugar a una distribución de temperatura que provoque la expansión térmica del mismo. Conocida la variación de temperatura que sufre el componente con respecto a una referencia, es posible, mediante el coeficiente de expansión térmica determinar el campo de deformaciones que provoca.

Por definición, $\alpha = \partial \varepsilon / \partial T$ cuando la deformación no está restringida, de forma que $\varepsilon = \alpha T$ únicamente si α es independiente de T . En otro caso

$$\varepsilon = \int_0^T \alpha dT = \bar{\alpha} T \quad \text{con} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha dT \quad (11)$$

Si el material no es isótropo, será necesario considerar la definición del coeficiente de expansión térmica en función de la dirección espacial. Por ejemplo, la expansión libre de un material ortótropo con ejes principales x , y , z produce las deformaciones iniciales

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\alpha_x T \quad \alpha_y T \quad \alpha_z T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (12)$$

siendo T la temperatura relativa a la de referencia para la cual el cuerpo está libre de tensiones, y α_x , α_y , α_z los coeficientes de expansión térmica en las direcciones principales de material. De esta forma, para tener en cuenta el efecto de la variación de temperatura podemos sustituir (12) en (10) y poner $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$. Alternativamente, podemos

sustituir $\boldsymbol{\sigma}_0 = -\mathbf{D}[\alpha_x T \ \alpha_y T \ \alpha_z T \ 0 \ 0 \ 0]^T$ en (10) y tomar $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{0}$. Las tensiones $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ prevalecen cuando las deformaciones mecánicas $\boldsymbol{\varepsilon}$ no están permitidas.

En las relaciones tensiones-deformaciones debe utilizarse la matriz \mathbf{D} apropiada a la temperatura existente. El coeficiente de Poisson está poco afectado por la temperatura. El módulo de elasticidad varía más: por ejemplo, para acero inoxidable E decrece alrededor de un 20% cuando la temperatura aumenta de 0 a 450°C.

1.1.1.3.- Ecuaciones de equilibrio estático

Equilibrio interno

La Figura 3 muestra un elemento diferencial bidimensional. Desarrollaremos las ecuaciones que establecen que el elemento diferencial está en equilibrio bajo las fuerzas aplicadas en él. Las fuerzas provienen de las tensiones en los lados y de las fuerzas por unidad de volumen.

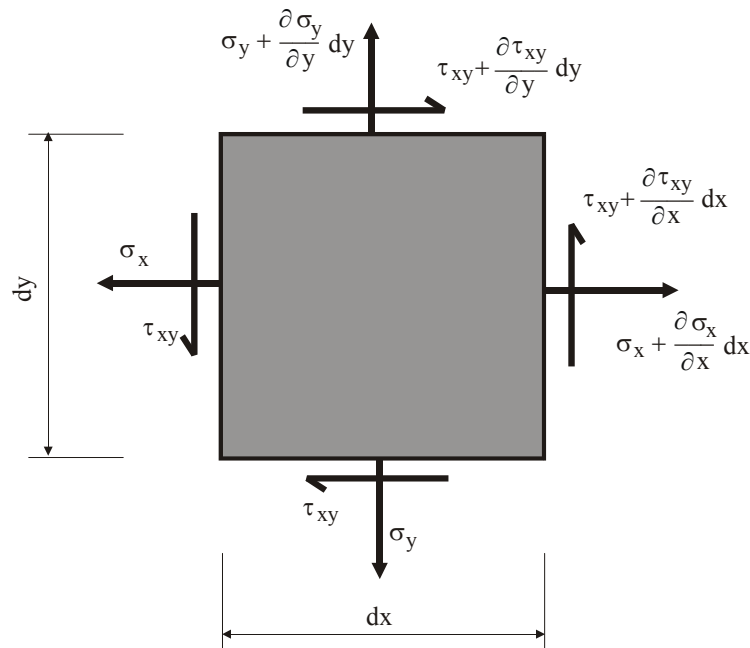


Figura 3.- Equilibrio interno.

Las fuerzas por unidad de volumen las denominamos \mathbf{b} , pueden provenir de la gravedad, aceleraciones, campos magnéticos, etc. En un elemento diferencial de volumen ($dV = t dx dy$, con t = espesor), b_x y b_y producen unas fuerzas diferenciales $b_x dV$ y $b_y dV$. Para un espesor constante, el equilibrio de momentos implica que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. El equilibrio estático de fuerzas en la dirección x requiere que:

$$-\sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) t dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) t dx + b_x t dx dy = 0 \quad (13)$$

y se puede plantear una ecuación similar en y . Después de simplificar ambas ecuaciones, se obtiene.

$$\begin{aligned} \text{dirección } x: \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \\ \text{dirección } y: \quad & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_y = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Las ecuaciones anteriores se han obtenido a partir de consideraciones de equilibrio y no se han considerado propiedades de material, por lo tanto son aplicables tanto a materiales elásticos lineales como no lineales.

Equilibrio en contorno

En la superficie del cuerpo elástico pueden existir fuerzas superficiales aplicadas, definidas por el vector \mathbf{t} . Estas fuerzas superficiales deben estar en equilibrio con las tensiones existentes en la superficie.

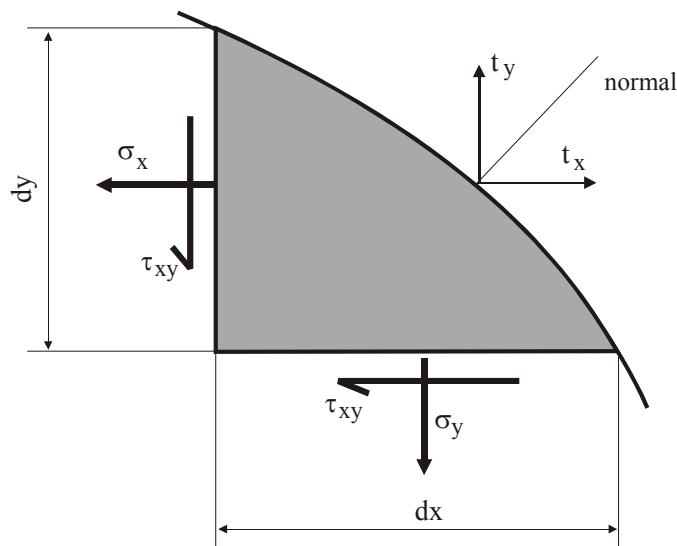


Figura 4.- Equilibrio en el contorno.

Las tracciones superficiales t_x y t_y (ver Figura 4) tienen unidades de tensiones y están aplicadas en el contorno. Las tracciones son fuerzas en las direcciones x e y por unidad de área de contorno ($dA = tds$, con $t = \text{espesor}$). El equilibrio de fuerzas en las direcciones x e y requiere que $t_x tds = \sigma_x tdy + \tau_{xy} tdx$ y $t_y tds = \sigma_y tdx + \tau_{xy} tdy$. Pero $dx/ds = m$ y $dy/ds = l$, donde l y m son los cosenos directores de la normal exterior al contorno. De esta forma:

$$\begin{aligned} \text{dirección } x: \quad & t_x = l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \text{dirección } y: \quad & t_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} \end{aligned} \quad (15)$$

Estas ecuaciones definen la relación entre las tensiones en un contorno arbitrario cuando se prescriben las tracciones t_x y t_y sobre dicho contorno. Estas ecuaciones son generales, al igual que (14).

Tres dimensiones

En casos tridimensionales, aplicando argumentaciones similares a las precedentes se llega a resultados análogos. Las ecuaciones de equilibrio interno y en la superficie son, respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}t_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \\ t_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ t_z &= l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z\end{aligned}\tag{17}$$

1.2.- Planteamiento del problema elástico

La mayor parte de los problemas continuos, incluyendo los problemas mecánicos estructurales y de sólidos, pueden formularse de acuerdo a uno de los dos métodos siguientes:

- método de ecuaciones diferenciales y
- métodos variacionales.

En ambos casos, las incógnitas del problema son los campos de desplazamientos, de deformaciones y de tensiones. Sin embargo, es posible definir el planteamiento del problema considerando como incógnitas fundamentales alguna de ellas y calculando las restantes en base a las ecuaciones de la teoría de la elasticidad.

Para un continuo tridimensional elástico, existen seis relaciones tensión – deformación, seis relaciones deformaciones – desplazamientos y tres ecuaciones de equilibrio y las incógnitas son seis tensiones, seis deformaciones y tres desplazamientos. Mediante la combinación de las ecuaciones anteriores se pueden obtener las tensiones en función de los desplazamientos, y sustituyendo éstas en las ecuaciones de equilibrio se puede obtener las tres ecuaciones de equilibrio en función de las tres componentes de desplazamiento. Se deben satisfacer naturalmente requisitos adicionales como las condiciones de contorno cuando se busca la solución en desplazamientos. Considerando las ecuaciones diferenciales resultantes, y utilizando un método de residuos ponderados por ejemplo, es posible plantear las ecuaciones de elementos finitos correspondientes,

en las que figurarán como incógnitas fundamentales los desplazamientos. Este enfoque conducirá a un método de elementos finitos denominado en desplazamientos. También es posible realizar un planteamiento en el que se consideran como variables principales las tensiones o un método mixto con desplazamientos y tensiones como incógnitas. Sin embargo, la mayor parte de los programas de elementos finitos están planteados con un método en desplazamientos, y a este planteamiento nos ceñiremos en la asignatura.

Otra alternativa para plantear las ecuaciones de elementos finitos es utilizar algún principio de la elasticidad. En el caso en que busquemos un planteamiento en desplazamientos, se debe de considerar el principio de mínima energía potencial.

Consideremos un cuerpo elástico, deformado por la acción de las fuerzas volumétricas, superficiales y puntuales. La energía potencial total de un cuerpo elástico se define como la energía de deformación del cuerpo más la energía potencial de las fuerzas que actúan.

El Teorema de la Energía Potencial Total Mínima se puede establecer como:

Los desplazamientos (u, v, w) que satisfacen las ecuaciones diferenciales de equilibrio, así como las condiciones de contorno, dan un mínimo para la energía potencial total en comparación con cualquier otro campo de desplazamientos que satisfaga las mismas condiciones de contorno.

Si la energía potencial total, Π_p , se expresa en términos de los desplazamientos u, v y w , el principio de mínima energía potencial resulta, en un estado de equilibrio

$$\delta\Pi_p(u, v, w) = \delta\Pi(u, v, w) - \delta W_p(u, v, w) = 0 \quad (18)$$

Es importante notar que la variación se realiza con respecto a los desplazamientos en la ecuación anterior suponiendo fuerzas actuantes y tensiones constantes.

Consideremos un cuerpo elástico (lineal) que soporta un conjunto de cargas conservativas. Sea su volumen V y su área superficial S . La expresión de la energía potencial total es

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (19)$$

En la primera integral de la ecuación anterior, la expresión entre paréntesis representa U_0 , la energía de deformación por unidad de volumen. Para obtener esta expresión consideremos un elemento diferencial. Las tensiones que actúan en las caras del elemento diferencial realizan un trabajo durante una deformación infinitesimal del cubo. Este trabajo se almacena como un incremento de la energía de deformación por unidad de volumen dU_0 . Considerando que el trabajo es igual a la fuerza por el desplazamiento,

$$dU_0 = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} \quad (20)$$

Se han descartado los cambios en las tensiones producidos por incrementos infinitesimales de deformación en dU_0 debido a que producen términos de orden

superior. Por ejemplo, $(\sigma_x + d\sigma_x) d\epsilon_x = \sigma_x d\epsilon_x$. De la ecuación anterior se concluye que la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a las deformaciones son las correspondientes tensiones. Expresando matricialmente esto y considerando las relaciones entre tensiones y deformaciones, obtenemos:

$$\frac{\partial dU_0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial dU_0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (21)$$

Integrando la última expresión con respecto a las deformaciones se obtiene el paréntesis de la expresión (19). No se ha considerado una constante de integración ya que desaparecerá en el proceso de diferenciación al hacer que la energía potencial total sea estacionaria.

Las integrales de (19) que contienen fuerzas volumétricas \mathbf{b} y superficiales \mathbf{t} representan el trabajo realizado (y en consecuencia la energía potencial perdida) por \mathbf{b} y \mathbf{t} cuando se deforma el cuerpo. Los desplazamientos en las direcciones del sistema de coordenadas x, y, z son

$$\mathbf{u}^T = \{u, v, w\} \quad (22)$$

De esta forma, los cambios de potencial asociados con \mathbf{b} y \mathbf{t} , por unidad de volumen y unidad de área son, respectivamente

$$-b_x u - b_y v - b_z w \quad \text{y} \quad -t_x u - t_y v - t_z w \quad (23)$$

que son los productos $-\mathbf{u}^T \mathbf{b}$ y $-\mathbf{u}^T \mathbf{t}$. Las integrales que contienen \mathbf{b} o \mathbf{t} se evalúan únicamente en la parte de V o S donde son no nulas.

El término final de (19), $-\mathbf{U}^T \mathbf{P}$, tiene en cuenta el trabajo realizado (por lo tanto pérdida de potencial) por las fuerzas y/o momentos aplicados. El potencial de estas cargas puede incluirse en las integrales de superficie imaginando tracciones elevadas aplicadas sobre áreas pequeñas, pero es más sencillo considerarlo directamente.

Considerando que según (6) las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ se pueden obtener mediante la aplicación del operador \mathbf{L} al campo de desplazamientos \mathbf{u} , la energía potencial total se puede escribir como:

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} - (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 + (\mathbf{L}\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (24)$$

El campo de desplazamientos u, v y w que minimiza Π_p y satisface las condiciones de contorno es el campo de desplazamientos correspondiente al equilibrio. Cuando utilicemos el principio de mínima energía potencial total en elementos finitos, supondremos una forma para el campo de desplazamientos dentro de cada elemento y utilizaremos el funcional Π_p para encontrar las ecuaciones de comportamiento de cada elemento. El método se denomina de desplazamientos. Las ecuaciones que resultan en este caso son ecuaciones de equilibrio aproximadas.

1.3.- Sistemas Discretos

Los procedimientos matriciales de mecánica estructural comparten un buen número de operaciones con el MEF. Son similares los procedimientos de ensamblado de elementos para formar la matriz de rigidez global, la imposición de condiciones de contorno de soporte, la solución del sistema de ecuaciones y el procesamiento de elementos para obtener las tensiones o deformaciones que en ellos aparecen.

En este apartado consideraremos las estructuras planas de barras articuladas, tipo simple de estructura que utilizaremos para introducir los conceptos y métodos indicados en el párrafo anterior. Este tipo de estructuras está compuesto por *elementos discretos*: barras articuladas en sus extremos. Sin entrar en las consideraciones relativas a cómo se idealiza mediante el MEF el comportamiento de los elementos finitos, introduciremos en este apartado los procedimientos necesarios para plantear y resolver el problema de una estructura previamente discretizada.

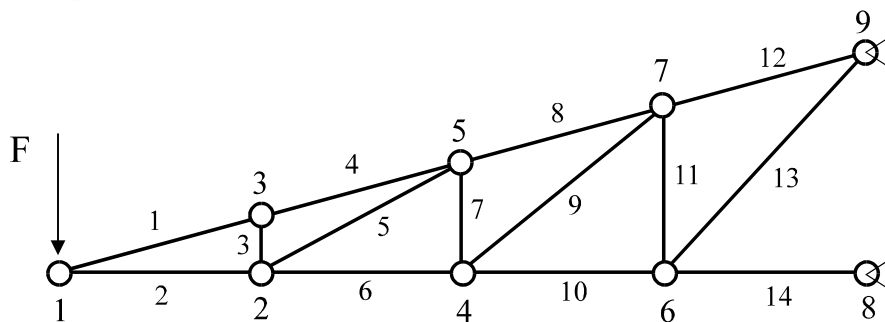


Figura 5.- Estructura plana de barras articuladas.

Supondremos que las solicitaciones son estáticas, todas las barras son uniformes, con comportamiento elástico lineal, articuladas en sus extremos y que por lo tanto sólo pueden transmitir fuerzas en la dirección de la propia barra. Supondremos también que los desplazamientos que se producen bajo el efecto de las fuerzas aplicadas son muy pequeños, de forma que se pueda considerar despreciable su efecto de la variación de la geometría.

Grados de libertad (gdl): Una estructura tiene N gdl si para definir unívocamente su configuración deformada es necesario considerar un mínimo de N parámetros independientes. En el caso considerado, la configuración deformada se puede definir completamente mediante los desplazamientos de los extremos de las barras (nodos de la estructura). Cada nodo tiene 2 gdl, correspondientes a los desplazamientos u y v en las direcciones x e y del sistema de coordenadas. Por lo tanto N será igual a 2 veces el número de nodos que pueden desplazarse.

La matriz de rigidez de la estructura relaciona las fuerzas aplicadas en los gdl con los desplazamientos de los mismos.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (25)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global de la estructura y \mathbf{F} y \mathbf{U} son los vectores de fuerzas aplicadas y desplazamientos producidos en los *gdl* respectivamente. Esta ecuación define el comportamiento global de la estructura. La matriz de rigidez de la estructura será por lo tanto de $N \cdot N$.

El significado físico de la matriz de rigidez \mathbf{K} es el siguiente. La columna j de \mathbf{K} es el vector de fuerzas que debe aplicarse a los *gdl* para mantener un estado de deformación con valor unidad en el desplazamiento del *gdl* j y cero en el resto de *gdl*. Una interpretación idéntica puede hacerse con respecto a la matriz de rigidez de los elementos \mathbf{k}^e , que relaciona las fuerzas externas aplicadas con los desplazamientos en los *gdl* del elemento. Esta interpretación física permite, para elementos discretos sencillos, la obtención directa de la matriz de rigidez de los elementos.

1.3.1.- Ecuaciones de Elemento

Para calcular la matriz de rigidez global de la estructura \mathbf{K} es conveniente calcular previamente las matrices de rigidez de cada uno de los elementos discretos que la componen \mathbf{k}^e .

$$\mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (26)$$

donde \mathbf{k}^e es la matriz de rigidez del elemento, \mathbf{f}^e el vector de fuerzas aplicadas en sus *gdl* y \mathbf{u}^e el vector de desplazamientos correspondiente.

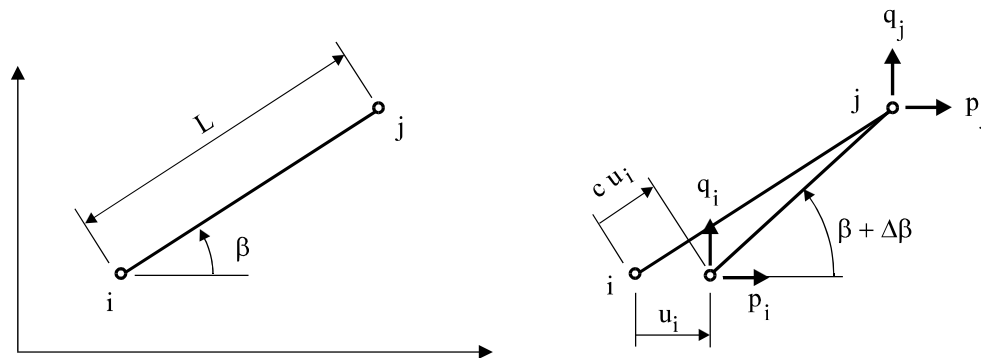


Figura 6.- Elemento barra articulada. Desplazamientos nodales impuestos $u_i > 0$ y $v_i = u_j = v_j = 0$

Consideremos un elemento barra articulada tal y como se muestra en la Figura 6. Este tipo de elemento tiene un total de 4 *gdl* (desplazamientos u y v en las direcciones x e y en cada uno de sus extremos). De esta forma la matriz de rigidez del elemento será de 4×4 . Supondremos un módulo de elasticidad E y que el área transversal A de la barra es constante. Para calcular la matriz de rigidez del elemento \mathbf{k}^e sólo es necesario conocer E , A y las coordenadas de sus nodos x_i , y_i , x_j e y_j . Definimos en primer lugar:

$$\begin{aligned}
 L &= \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^{1/2} \\
 s = \text{sen}\beta &= \frac{y_j - y_i}{L} \\
 c = \text{cos}\beta &= \frac{x_j - x_i}{L}
 \end{aligned} \tag{27}$$

Para definir las columnas de la matriz de rigidez del elemento supondremos un desplazamiento en un *gdl*, manteniendo nulos los desplazamientos de los *gdl* restantes. Las fuerzas exteriores necesarias para mantener tal configuración servirán para definir la columna correspondiente de \mathbf{k}^e .

Consideremos en primer lugar el caso mostrado en la Figura 6: desplazamiento u_i . Este desplazamiento produce un acortamiento cu_i de la barra (y un pequeño giro que consideraremos despreciable por la suposición de pequeños desplazamientos). Este acortamiento debe equilibrarse por una fuerza de compresión de valor $F = (EA/L)cu_i$, cuyas componentes en x e y son respectivamente $p_i = -p_j = Fc$ y $q_i = -q_j = Fs$. Estas componentes definen el equilibrio estático, con lo que

$$\frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} c^2 \\ cs \\ -c^2 \\ -cs \end{Bmatrix} u_i = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{Bmatrix} \tag{28}$$

Este procedimiento se puede aplicar sucesivamente a los desplazamientos nodales restantes v_i , u_j y v_j . Si todos los desplazamientos nodales pueden ser simultáneamente no nulos, superponiendo los resultados, obtendríamos:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{Bmatrix} \tag{29}$$

con $c = \text{cos}\beta$ y $s = \text{sen}\beta$. De forma abreviada la ecuación anterior puede escribirse como

$$\mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \tag{30}$$

que representa la ecuación matricial de comportamiento del elemento.

1.3.2.- Ensamblado de elementos

Aunque estemos considerando el caso del análisis de estructuras planas de barras articuladas, el procedimiento de ensamblado depende muy poco del tipo de elemento, con lo cual el procedimiento es general.

Consideraremos el caso más simple en cuanto a fuerzas exteriores aplicadas. Supondremos que las únicas fuerzas exteriores que actúan están aplicadas directamente en los nodos. Buscamos definir las ecuaciones de comportamiento globales de la estructura en base a las ecuaciones de comportamiento de cada elemento. Tendremos pues que considerar en este proceso las condiciones de equilibrio estático y las de compatibilidad de desplazamientos.

Para definir el proceso de ensamblado es conveniente considerar conceptualmente la expansión de las matrices de elemento al tamaño global del problema. Para ello definimos \mathbf{u} como el vector cuyas componentes son los desplazamientos nodales de todos los *gdl* de la estructura. De esta forma, la matriz de rigidez expandida del elemento \mathbf{K}^e se formará a partir de los elementos de la matriz \mathbf{k}^e , posicionándolos según la numeración global de los *gdl* de la estructura. De la misma forma se expandirá el vector \mathbf{f}^e a \mathbf{F}^e .

Para que todos los nodos de la estructura estén en equilibrio estático es necesario que el conjunto de fuerzas que inciden en cada uno de ellos sea igual a la fuerza exterior aplicada. Las fuerzas que actúan en cada elemento están definidas por el vector \mathbf{F}^e , que según la ecuación 6 es igual a $\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e$. Definiendo \mathbf{F} como el vector (tamaño de la estructura global) que contiene todas las fuerzas externas aplicadas

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{F}^e \rightarrow \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e \mathbf{U} \quad (31)$$

donde n_e es el número de elementos que componen la estructura. Si definimos

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e \quad (32)$$

se obtiene la ecuación matricial de comportamiento global de la estructura.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (33)$$

En el proceso de ensamblado no es necesario expandir realmente la matriz de rigidez de cada elemento. Se puede entender el proceso de ensamblado partiendo de una matriz \mathbf{K} nula de $N \cdot N$ a la que se va añadiendo la contribución de cada elemento, considerando las posiciones definidas por sus *gdl* globales. En la Figura 7 se muestra la matriz de rigidez ensamblada correspondiente a la estructura de la Figura 5. Cada casilla representa la submatriz (2×2) asociada a una pareja de nodos, y en cada una de ellas se definen los elementos que contribuyen a formarlas.

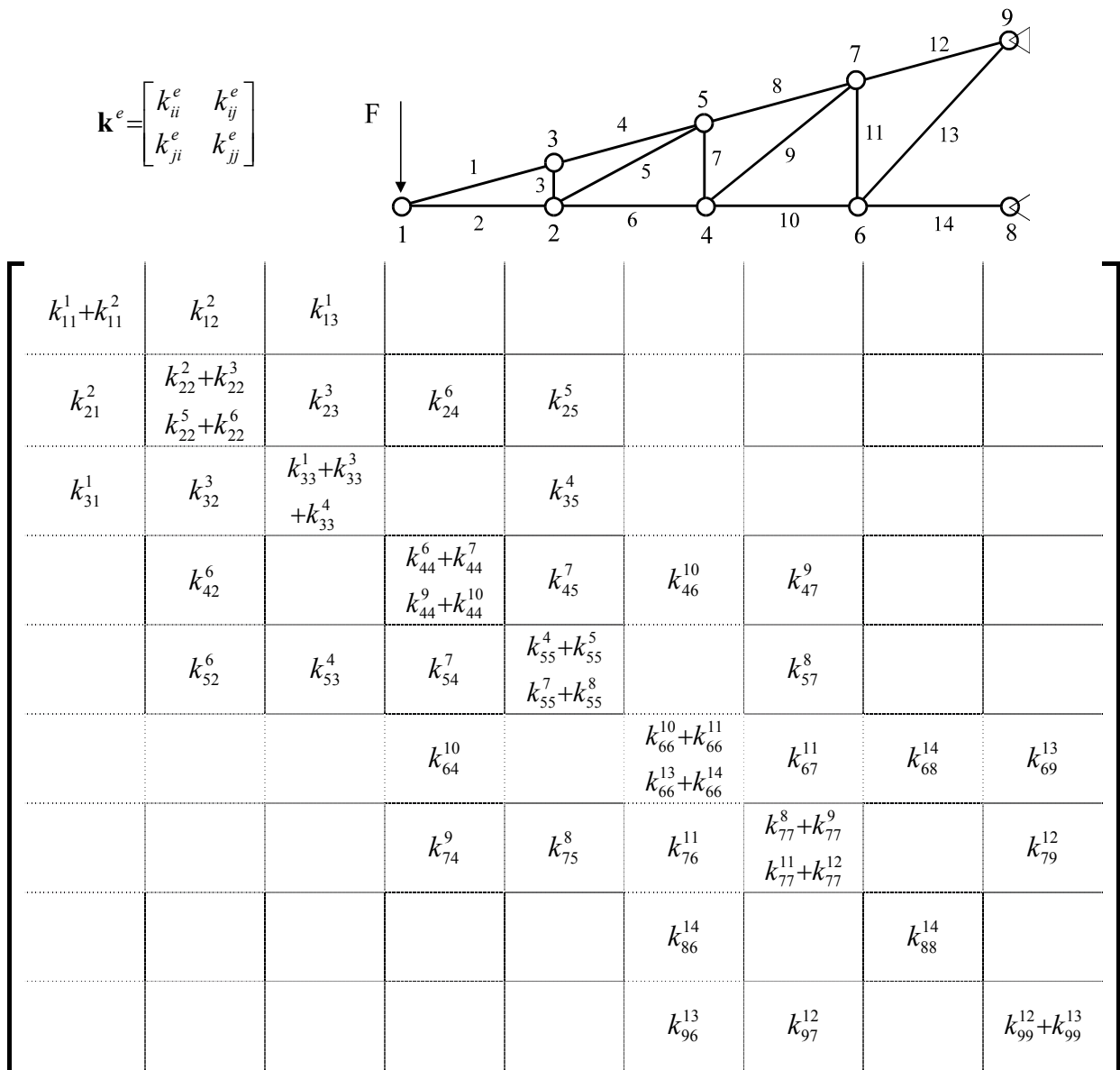


Figura 7.- Ensamblado de la matriz de rigidez (cada posición corresponde a una submatriz de 2x2).

Si existieran fuerzas aplicadas en los elementos, en primer lugar se deberá calcular las fuerzas equivalentes en los nodos. El vector de carga global estará en este caso definido por las fuerzas directamente aplicadas en los nodos y las provenientes de cada elemento. Estas últimas llevarían asociado un proceso de ensamblado similar al de la matriz de rigidez.

Para formar \mathbf{K} hemos considerado que se debe satisfacer el equilibrio de fuerzas. Las condiciones de compatibilidad se satisfacen automáticamente en cada nodo ya que los desplazamientos del mismo son comunes para todos los elementos que inciden en él.

1.3.3.- Propiedades de la matriz de rigidez global

La matriz de rigidez global de la estructura tiene ciertas propiedades que pueden ser muy útiles tanto para seleccionar métodos numéricos para su resolución como procedimientos de almacenamiento, etc.

En primer lugar hay que indicar que la matriz de rigidez \mathbf{K} es simétrica. Esto puede comprobarse a partir del ejemplo presentado. Las matrices de rigidez de elemento \mathbf{k}^e son simétricas, las expandidas \mathbf{K}^e también lo serán y en consecuencia la matriz global (ensamblada a partir de las de los elementos) será también simétrica. El Teorema de Reciprocidad de Maxwell-Betti define esta propiedad de forma más general.

Otra característica importante de la matriz \mathbf{K} es que es semidefinida positiva. Una matriz se dice que es semidefinida positiva si para cualquier vector \mathbf{U} arbitrario, diferente del nulo, $\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \geq 0$. En este caso, la expresión $\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$ representa el doble de la energía de deformación almacenada en la estructura en el estado definido por el vector \mathbf{U} . Por definición, la energía de deformación es siempre positiva, con lo que la matriz \mathbf{K} es semidefinida positiva. La energía almacenada será nula para un vector de desplazamientos nodales \mathbf{U} si tal vector representa una configuración en la que no existen deformaciones. Esto puede ocurrir si el sistema discreto es un mecanismo. Otra posibilidad es que existan movimientos de cuerpo rígido, en los que toda la estructura se desplaza o gira sin que se produzcan deformaciones. En general, para realizar el análisis será necesario considerar las restricciones o soportes de la estructura de forma que \mathbf{K} no sea singular. Si éstos son suficientes para eliminar los movimientos de cuerpo rígido, la matriz de rigidez resultante será definida positiva.

Por último, la matriz de rigidez global tiene gran parte de sus coeficientes nulos, y mediante una numeración correcta de los *gdl* tales coeficientes pueden agruparse en ciertas zonas de la matriz de rigidez. La forma de agrupamiento más sencilla de los coeficientes nulos es la que produce matrices en banda, es decir, matrices en las que todos los coeficientes K_{ij} son nulos para $j > i + s_b$. A s_b se le denomina semiancho de banda. Si tenemos un semiancho de banda pequeño en comparación con el número total de *gdl*, podremos disminuir notablemente las necesidades de almacenamiento de los coeficientes de \mathbf{K} , considerando únicamente los contenidos en el semiancho de banda. Además, en la resolución del sistema de ecuaciones resultante operaremos exclusivamente con los coeficientes no nulos, haciendo más eficientes los algoritmos de resolución.

Un coeficiente K_{ij} de la matriz de rigidez global será nulo si no existe ningún elemento que conecte los *gdl* asociados a i y j . Esto es debido a que \mathbf{K} se forma mediante el ensamblado de matrices de elemento. A la vista de esto, si variamos la numeración de los *gdl* (asociada a la de los nodos) variaremos la posición de los coeficientes nulos. Conseguiremos un semiancho de banda mínimo cuando la máxima diferencia entre los números de *gdl* que conecta cualquier elemento sea mínima. Cuando el número de grados de libertad es elevado o el sistema a modelar es complejo, no es sencillo predefinir la numeración óptima. Por este motivo, los programas de elementos finitos incorporan algoritmos de renumeración destinados a generar una numeración eficiente.

1.3.4.- Aplicación de Condiciones de Contorno. Resolución en Desplazamientos

Como se ha comentado en el apartado anterior, la matriz de rigidez global \mathbf{K} es singular y en consecuencia no existe una única solución de la ecuación $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$. Será por lo tanto necesario simular las condiciones de contorno reales de la estructura, con lo que en general eliminaremos la singularidad. Existen diversos tipos de condiciones de contorno a aplicar, aunque en este apartado únicamente consideraremos la más sencilla que consiste en suponer que ciertos desplazamientos nodales son nulos (soportes).

Para considerar tal tipo de condiciones de contorno supongamos que subdividimos los grados de libertad globales de la estructura en dos grupos: los que están restringidos, \mathbf{U}_r (desplazamiento nulo), y los libres, \mathbf{U}_l . De esta forma

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_r \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Subdividiendo la matriz de rigidez global \mathbf{K} y el vector de fuerzas aplicadas \mathbf{F} de forma análoga.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lr} \\ \mathbf{K}_{rl} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_l \\ \mathbf{U}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix} \quad (35)$$

La primera de las dos ecuaciones matriciales descritas por la 11 es

$$\mathbf{K}_{ll}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{lr}\mathbf{U}_r = \mathbf{F}_l \quad (36)$$

y si consideramos que $\mathbf{U}_r = \mathbf{0}$, representa un sistema de ecuaciones lineales del que es posible obtener el vector de desplazamientos libres. La matriz de coeficientes de tal sistema de ecuaciones es la correspondiente global del sistema en la que no se han ensamblado las rigideces asociadas a los grados de libertad con desplazamiento nulo. De la segunda ecuación se obtiene

$$\mathbf{K}_{rl}\mathbf{U}_l + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{U}_r = \mathbf{F}_r \quad (37)$$

Calculados los desplazamientos libres \mathbf{U}_l , mediante la ecuación anterior es posible calcular las fuerzas que aparecen en los desplazamientos de los *gdl* restringidos (reacciones), de forma que se satisfaga el equilibrio.

De esta forma, tendríamos calculados los desplazamientos nodales de la estructura, y por lo tanto tendríamos definida su deformada. En el ejemplo sencillo que nos ocupa, las tensiones que aparecen en cualquier elemento barra serán únicamente uniaxiales (tracción o compresión únicamente). Calculados los desplazamientos nodales es inmediato el cálculo de la variación de longitud de cualquier barra, y en base a su área transversal y módulo de elasticidad se pueden calcular la tensión a la que está sometida.

2.- MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Una estructura compuesta por elementos discretos, tales como elementos barra por ejemplo, puede representarse exactamente por un número finito de *gdl*; estos *gdl* son los desplazamientos de los extremos del elemento. Un continuo, tal como un sólido elástico, tiene un número infinito de *gdl*; estos *gdl* son los desplazamientos de todos los puntos materiales. El comportamiento está definido por un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es difícil, incluso para los problemas más simples, encontrar el campo de desplazamientos o tensional que resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales y satisface las condiciones de contorno. Se puede eliminar la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales aplicando el método de Rayleigh-Ritz a un funcional que describa el problema. El resultado es un problema aproximado que tiene un número finito de *gdl* y se describe mediante ecuaciones algebraicas en vez de mediante ecuaciones diferenciales. Una solución de Rayleigh-Ritz no es exacta en general, pero es más precisa a medida que se utilizan más *gdl*.

El método de Rayleigh-Ritz se inició en 1870 con los estudios sobre problemas vibratorios de Lord Rayleigh. Utilizó un campo aproximado definido mediante un solo *gdl*. En 1909, Ritz generalizó el método construyendo un campo aproximado a partir de varias funciones, satisfaciendo cada una de ellas las condiciones de contorno esenciales (cinemáticas), y cada una de ellas con un grado de libertad asociado. Ritz aplicó el método a problemas de equilibrio y de valores propios. El procedimiento para problemas de equilibrio (estáticos), considerando el principio de la energía potencial total mínima, es el siguiente.

Consideremos un cuerpo elástico, en donde se desean calcular los desplazamientos y tensiones causados por las fuerzas aplicadas. El desplazamiento de un punto está descrito por sus componentes u , v y w . El método de Rayleigh-Ritz parte de unos campos aproximados para u , v y w . Cada campo está definido mediante una serie, cuyo término típico es una función de las coordenadas, $f_i = f_i(x, y, z)$, multiplicado por la amplitud a_i correspondiente. Estas amplitudes, desconocidas, se denominan coordenadas generalizadas.

$$u = \sum_{i=1}^l a_i f_i; \quad v = \sum_{i=l+1}^m a_i f_i; \quad w = \sum_{i=m+1}^n a_i f_i \quad (38)$$

Cada una de las funciones $f_i = f_i(x, y, z)$ debe ser admisible, es decir debe satisfacer las condiciones de compatibilidad y las condiciones de contorno esenciales. No es necesario que satisfagan condiciones de contorno no esenciales (aunque esto da lugar a una mejor aproximación para un mismo número de *gdl*). Usualmente, aunque no es necesario, las funciones f_i son polinómicas. El analista debe estimar cuantos términos son necesarios en cada serie para conseguir la precisión deseada. De esta forma la serie se trunca, teniendo respectivamente l , $m-l$ y $n-m$ términos de un total de n términos.

Los *gdl* del problema son las n amplitudes a_i . En el caso elástico se pueden determinar sustituyendo en la energía potencial total el campo de desplazamientos exacto por el

aproximado. De esta forma la energía potencial total será función de las amplitudes a_i , *gdl* del problema. De acuerdo con el principio de energía potencial total estacionaria, la configuración de equilibrio se define por las n ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial a_i} = 0; \quad i=1,2,\dots,n \quad (39)$$

Después de resolver numéricamente la ecuación 2 para encontrar los valores de a_i , los campos de desplazamientos están completamente definidos mediante la ecuación 1. Derivando los campos de desplazamientos se obtienen las deformaciones, y mediante las relaciones tensiones - deformaciones se obtienen las tensiones.

Las ecuaciones 1 definen un problema aproximado ya que los infinitos *gdl* se reemplazan por un número finito de *gdl* en el modelo matemático. Una solución Rayleigh-Ritz es en general aproximada debido a que las funciones f_i son incapaces usualmente de representar exactamente los desplazamientos reales. El proceso de solución calcula las amplitudes a_i , de forma que la combinación de las funciones f_i sea la mejor posible. Cuando Π_p es el funcional, la mejor solución es la que tiende a satisfacer las ecuaciones diferenciales de equilibrio y las condiciones de contorno en tensiones lo más precisamente posible, ajustándose más a medida que se añaden más términos $a_i f_i$ en las series.

Supongamos que resolvemos un problema sucesivamente, añadiendo una función adicional al campo supuesto. De esta forma generamos una secuencia de soluciones aproximadas. Podemos esperar que esta secuencia converja: al valor exacto de Π_p , a los valores exactos de los desplazamientos y a los valores exactos de las tensiones. Una condición necesaria para la convergencia es que el campo supuesto sea completo. Esto se consigue si los desplazamientos exactos, y las derivadas que aparecen en Π_p , pueden aproximarse tanto como se quiera a medida que aparecen más términos en el desarrollo. Una serie polinómica es completa si es de grado suficiente y no se omite ningún término.

Una solución Rayleigh-Ritz es, o bien exacta o más rígida que la exacta. Esto sucede ya que sólo se permite deformar matemáticamente al sistema según la forma que se pueden describir mediante una combinación de las funciones $f_i(x, y, z)$ presentes en el campo de desplazamientos supuesto. De esta manera, la forma correcta de deformación se excluye a no ser que el campo supuesto de desplazamientos la contenga. El campo de desplazamientos supuesto induce por lo tanto restricciones que no permiten que el sistema se deforme como se deformaría en la realidad. Las restricciones rigidizan el sistema, creando un sistema más rígido que el real.

Consideremos un cuerpo elástico sobre el que se aplica un conjunto de fuerzas definido por \mathbf{F} . El trabajo W realizado por las fuerzas que se incrementan gradualmente desde cero a \mathbf{F} es $W = \mathbf{U}^T \mathbf{F} / 2$ si el sistema es elástico lineal. La solución aproximada da lugar a desplazamientos \mathbf{U} tales que el trabajo W es menor que su valor exacto, ya que el sistema está rigidizado. Esto no significa que necesariamente todos los desplazamientos del vector \mathbf{U} estén subestimados. Sin embargo, si el sistema soporta una única fuerza F , los desplazamientos calculados \mathbf{U} son un límite inferior de los reales. La energía de

deformación U es numéricamente igual a W , de forma que la solución aproximada subestima U cuando se prescriben las fuerzas.

Si, alternativamente, se prescriben los desplazamientos se sobrestima U debido a que son necesarias unas fuerzas extras para deformar el sistema rigidizado matemáticamente. Cuando se prescriben las fuerzas y los desplazamientos, U puede estar sobre o subestimada.

Las tensiones se calculan a partir de los desplazamientos, de forma que podemos esperar que en el caso en el que se subestimen los desplazamientos, también se subestimarán las tensiones. Sin embargo, las tensiones aproximadas pueden ser inferiores en unas zonas y superiores en otras, con lo que no es posible aplicar ninguna regla en este caso.

3.- FORMULACIÓN EN DESPLAZAMIENTOS

En este apartado consideraremos el planteamiento de método de elementos finitos en desplazamientos. Por este motivo tomaremos como variables independientes los desplazamientos. En este caso, la expresión del funcional apropiado para la solución de Rayleigh-Ritz es la expresión de la energía potencial total.

3.1.- Matrices de elemento \mathbf{k}^e y vectores fuerza equivalente \mathbf{f}^e

La obtención de la formulación de elementos finitos puede describirse de la siguiente forma:

- Supondremos que discretizamos el dominio en una serie de elementos finitos. Tales elementos están definidos en base a sus nodos (ver Figura 8).
- Seleccionamos un campo de desplazamientos admisible, definido a tramos. Los desplazamientos en cualquier punto del dominio se interpolan a partir de su valor en los *gdl* del elemento que lo contiene (ver Figura 9)
- Evaluamos el funcional considerando la interpolación realizada, que será función de los desplazamientos nodales. Aplicando el principio de energía potencial total estacionaria con respecto a los desplazamientos nodales, obtendremos un sistema algebraico de ecuaciones, a partir del cual es posible obtener los desplazamientos nodales.

En el desarrollo del proceso, identificaremos ciertas expresiones como la matriz de rigidez del elemento \mathbf{k}^e y el vector de fuerzas equivalentes en el elemento \mathbf{f}^e .

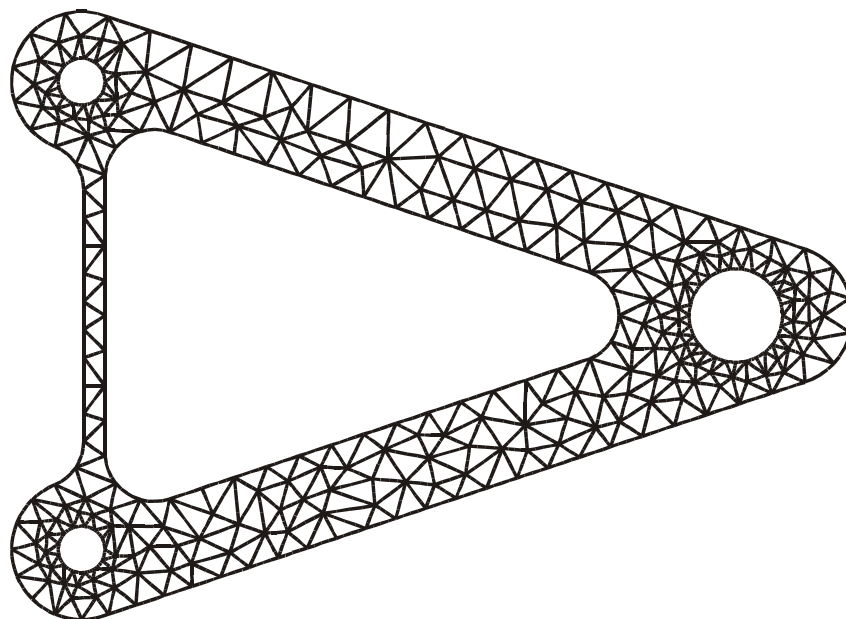


Figura 8.- Discretización de un problema bidimensional en elementos triangulares de tres nodos.

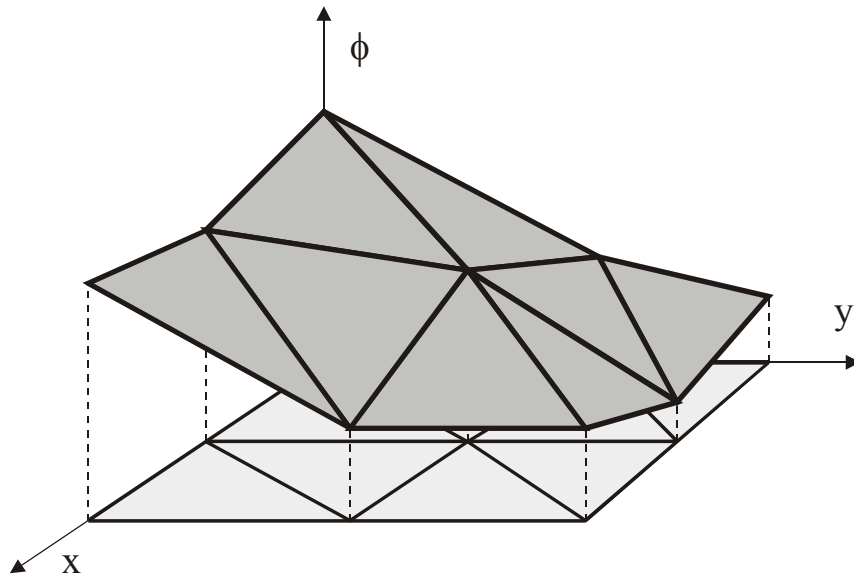


Figura 9.- Interpolación lineal mediante elementos triangulares de tres nodos.

El punto de partida es la expresión de la energía potencial total en un cuerpo elástico lineal:

$$\Pi_p = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \right) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (40)$$

en donde:

- $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^T$: campo de desplazamientos.
- $\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \}$: campo de deformaciones.
- \mathbf{D} : matriz de propiedades de material.
- $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\sigma}_0$: deformaciones y tensiones iniciales.
- $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$: fuerzas volumétricas.
- $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$: fuerzas superficiales.
- \mathbf{U} : desplazamientos nodales del sistema.
- \mathbf{P} : cargas puntuales aplicadas en los nodos.
- S, V : contorno y dominio de definición del problema.

Consideremos la discretización del dominio en un conjunto de elementos finitos (ver Figura 8). Tales elementos tienen formas normalizadas, y se describirán en un capítulo posterior. Considerando que la unión de los dominios definidos para cada elemento es el dominio real y que su intersección es nula, y que existe continuidad C^0 de los

desplazamientos en las fronteras entre elementos, la energía potencial total puede calcularse a partir de la energía asociada a cada elemento, de forma que:

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \right) dV - \\ & - \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV + \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0) dV - \\ & - \sum_{e=1}^{ne} \int_{V^e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \sum_{e=1}^{ne} \int_{S^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (41)$$

Donde V^e y S^e representan al dominio y contorno del elemento finito 'e', y 'ne' es el número de elementos de la malla. Es posible que la modelización de un dominio mediante elementos finitos no describa exactamente el dominio real, ya que la forma del contorno de los elementos finitos no puede reproducir cualquier contorno. Sin embargo, si el tamaño de los elementos finitos es suficientemente pequeño, las discrepancias entre el modelo de elementos finitos y el dominio real tienden a reducirse y en el límite (cuando el tamaño de elemento tienda a cero) para que exista convergencia a la solución exacta, es necesario que ambos dominios coincidan.

Los desplazamientos dentro de cada elemento se interpolan a partir de los desplazamientos nodales \mathbf{u}^e (vector que contiene los desplazamientos de los nodos que definen el elemento),

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{u}^e \quad (42)$$

donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma. Aunque no es necesario especificar por ahora la forma concreta de la matriz de funciones de forma \mathbf{N} , indicar que sus componentes son funciones de las coordenadas. Como ejemplo sencillo de interpolación, en la Figura 10 se muestra gráficamente la interpolación de una función arbitraria ϕ en un elemento bidimensional triangular de tres nodos, en función del valor de dicha función en los nodos (interpolación lineal). Cuando es necesario interpolar varias funciones incógnitas (como el caso de los desplazamientos en el problema elástico), se puede utilizar este tipo de interpolación para cada una de ellas.

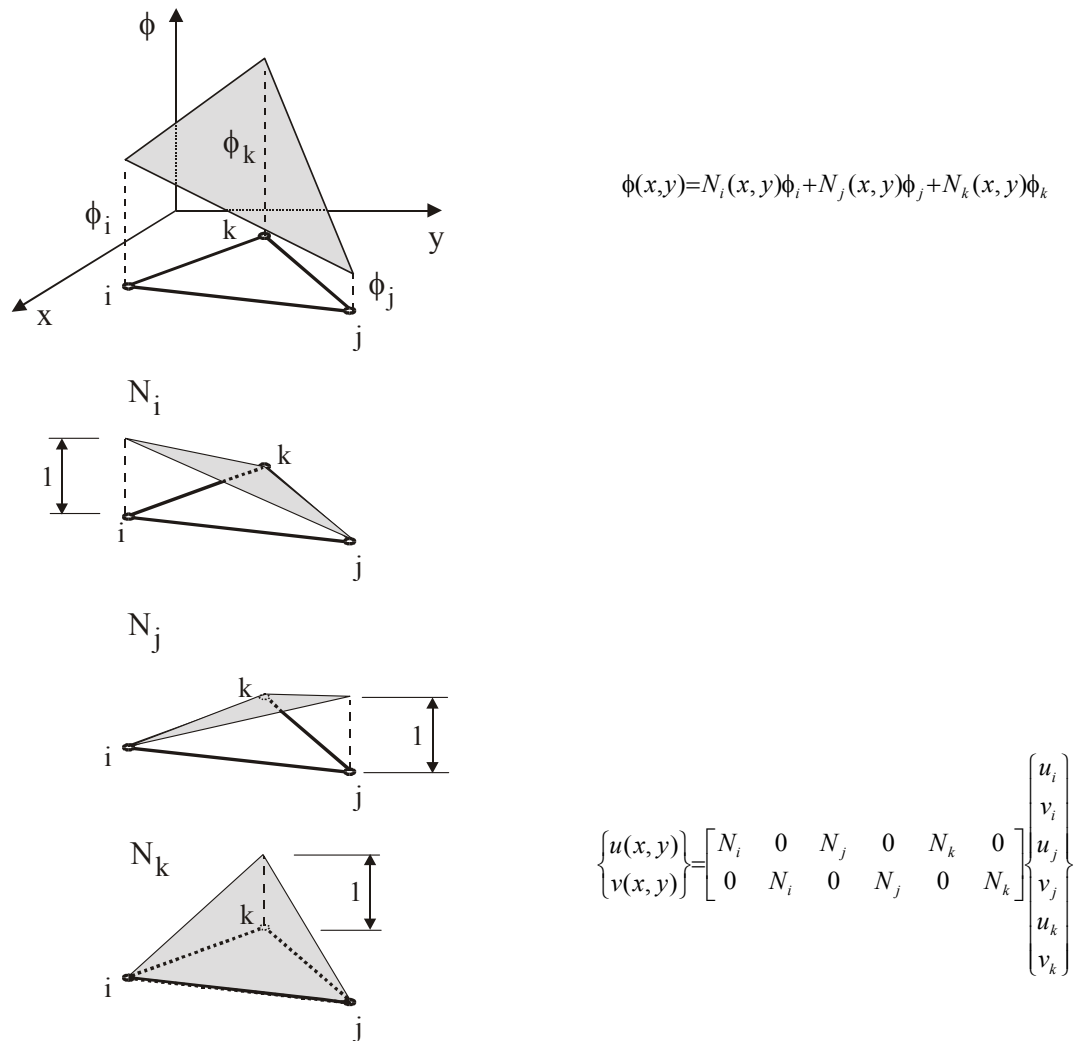


Figura 10.- Interpolación lineal en elemento triangular de tres nodos. Funciones de forma.

A partir de este momento sólo se requieren unas pocas manipulaciones. Las deformaciones se obtienen de los desplazamientos mediante diferenciación.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{u}^e \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \quad \text{con} \quad \mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (43)$$

La matriz operador diferencial \mathbf{L} actúa sobre la matriz de funciones de forma. El operador \mathbf{L} contiene en el caso del problema elástico primeras derivadas con respecto a las coordenadas, y las componentes de la matriz \mathbf{N} son funciones de forma conocidas que dependen de las coordenadas. Sustituyendo las expresiones de \mathbf{u} y $\boldsymbol{\varepsilon}$ en cada uno de los términos de (41), y considerando que el vector de desplazamientos nodales es constante para cada elemento, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{V^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV &= \frac{1}{2} \int_{V^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}^e dV = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \left[\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e\end{aligned}\quad (44)$$

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV = \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0) dV \right\} = \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e \quad (45)$$

$$\int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV = \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \right\} = -\mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}_{\sigma_0}^e \quad (46)$$

$$\int_{V^e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV = \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right\} = \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}_b^e \quad (47)$$

$$\int_{S^e} \mathbf{u}^T \mathbf{t} dV = \mathbf{u}^{eT} \left\{ \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dV \right\} = \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}_t^e \quad (48)$$

A partir de este desarrollo, la expresión de la energía potencial total del sistema puede expresarse como:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e - \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (49)$$

Donde los símbolos de sumatorio indican que incluimos las contribuciones de todos los elementos finitos. Hemos definido la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (50)$$

y el vector de fuerzas equivalentes en los nodos:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^e &= \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e + \mathbf{f}_{\sigma_0}^e + \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e \\ \left| \begin{aligned} \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV \\ \mathbf{f}_{\sigma_0}^e &= - \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \\ \mathbf{f}_b^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \\ \mathbf{f}_t^e &= \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \end{aligned} \right. \quad (51)\end{aligned}$$

En la integral de superficie, \mathbf{N} se evalúa en S_e . La matriz \mathbf{k}^e corresponde a una matriz de rigidez que relaciona los desplazamientos de los nodos de los elementos con las fuerzas aplicadas en los mismos. El vector \mathbf{f}^e define las fuerzas nodales equivalentes a las aplicadas sobre los nodos del elemento correspondientes a las deformaciones y tensiones iniciales, y a las fuerzas volumétricas y superficiales aplicadas. Esta matriz de rigidez y vector de fuerzas equivalentes en nodos son aproximados ya que son el resultado de suponer una cierta forma de variación del campo de desplazamientos dentro del elemento (interpolación de elementos finitos),

Para completar el desarrollo, debemos determinar las ecuaciones algebraicas para calcular los desplazamientos nodales. Cualquier desplazamiento nodal del vector de elemento \mathbf{u}^e también aparece en el vector global \mathbf{U} . De esta forma podemos expandir conceptualmente la matriz de rigidez \mathbf{k}^e y el vector de fuerzas equivalentes \mathbf{f}^e de cada elemento al tamaño global (\mathbf{K}^e y \mathbf{F}^e). De esta forma, la ecuación (49) queda:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (52)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = \mathbf{P} + \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{F}^e \quad (53)$$

Los sumatorios pueden entenderse como ensamblado de matrices de elemento por la adición de coeficientes que se solapan con respecto a la numeración de los *gdl* globales. Ahora Π_p es una función de los desplazamientos nodales \mathbf{U} . Haciendo Π_p estacionario con respecto a pequeños cambios en U_i , utilizando convenientemente las reglas de diferenciación, podemos escribir:

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_p}{\partial \mathbf{U}} \right\} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (54)$$

La última ecuación matricial es un conjunto de ecuaciones algebraicas que puede utilizarse para obtener \mathbf{U} . Debemos remarcar que $\partial \Pi_p / \partial U_i = 0$ es una ecuación de equilibrio nodal (equilibrio de fuerzas en los nodos), \mathbf{K} es una matriz simétrica y $K_{ij} = \partial^2 \Pi_p / \partial U_i \partial U_j$.

3.2.- Cálculo de tensiones

Una vez se han calculado las matrices de rigidez y vectores de fuerzas equivalentes en los nodos de los elementos, ensamblando y aplicando las condiciones de contorno se obtiene un sistema de ecuaciones. La resolución de tal sistema da lugar al vector de desplazamientos nodales \mathbf{U} . A partir del vector de desplazamientos se deberán calcular las tensiones que aparecen en cada uno de los elementos finitos.

Las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en un elemento pueden calcularse a partir de los desplazamientos de sus nodos \mathbf{u}^e . Estos desplazamientos son conocidos a partir del vector global de desplazamientos nodales \mathbf{U} . De la teoría de la elasticidad, la relación entre tensiones y deformaciones para comportamiento lineal es

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (55)$$

en la que las tensiones mecánicas $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$ (véase (43)) están producidas por los desplazamientos de los nodos. La matriz \mathbf{B} se obtiene de la aplicación del operador \mathbf{L} (que contiene primeras derivadas) sobre la matriz de funciones de forma (que dependen de las coordenadas), con lo que deberá evaluarse en los diferentes puntos del elemento en donde se deseen calcular las tensiones.

El cálculo $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$ implica la derivación del campo de desplazamientos. De esta forma, es de esperar que las tensiones sean menos precisas que los desplazamientos. Los elementos de bajo orden (funciones de forma básicamente lineales) presentan una mayor precisión de las tensiones en su centroide, menor en los puntos medios de los lados y más pequeña en los nodos. Los elementos de orden elevado presentan en general diversos puntos de precisión óptima para el cálculo de tensiones. La posición de tales puntos depende de la geometría del elemento y del campo de desplazamientos, y en general puede predecirse numéricamente (en general cercanos a los puntos de integración numérica). Las tensiones en otros puntos del elemento diferentes a los óptimos de cálculo de tensiones se obtienen usualmente mediante extrapolación.

4.- REQUISITOS DE CONVERGENCIA

Si analizamos un problema utilizando cada vez una malla más fina de elementos, generaremos una secuencia de soluciones aproximadas. Es importante que tal secuencia converja a la solución exacta, es decir, que el error entre la solución aproximada y la exacta tienda a cero cuando el número de elementos tienda a infinito (o su tamaño tienda a cero). De esta forma podremos obtener la solución del problema con el error deseado aumentando el número de gdl

De forma general, considerando interpolaciones polinómicas, los requisitos de convergencia se pueden establecer de la siguiente forma. Supongamos una variable $\phi = \phi(x, y, z)$, y sea $\Pi = \Pi(\phi)$ el funcional cuya condición de estacionariedad $d\Pi = 0$ da lugar a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema físico. Supongamos que contiene derivadas de ϕ hasta un orden m . Si la solución exacta debe alcanzarse a medida que la malla se refina, es necesario que en el límite (cuando el tamaño de elemento tienda a cero) que :

1. Dentro de cada elemento, la forma del campo supuesta para ϕ debe contener un polinomio completo de grado m .
2. Debe existir continuidad en ϕ y en sus $m-1$ derivadas a lo largo de los contornos entre elementos.
3. Consideremos los elementos en una malla (y no individualmente). Supongamos que imponemos unas condiciones de contorno apropiadas en la malla como para producir un valor constante de cualquier derivada m -ésima de ϕ . En estas condiciones, a medida que la malla se refina, cada elemento debe poder representar este valor constante.

Por ejemplo, si $\phi = \phi(x, y)$ (caso bidimensional) y contiene primeras derivadas de ϕ , el mínimo orden polinómico aceptable en cada elemento es $\phi = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y$, solo es necesario que ϕ sea continua en los contornos entre elementos, y cada elemento de una malla apropiadamente cargada debe de poder representar un valor constante de $\partial\phi/\partial x$ (o de $\partial\phi/\partial y$ para otra condición apropiada de carga), por lo menos a medida que se refina la malla.

El requisito 1 asegura que se puedan evaluar los diferentes términos incluidos en el funcional. El requisito 2 es necesario para que el funcional pueda evaluarse a partir de las contribuciones de cada uno de los elementos finitos en los que se ha discretizado el componente. Por último, a medida que refinamos una malla de elementos finitos, el tamaño de cada elemento tiende a cero y el número de elementos a infinito. En esta condición límite, la solución del problema puede representarse a partir del valor constante de las funciones o sus derivadas que aparecen en el funcional.

La satisfacción de estos requisitos garantiza la convergencia a los resultados correctos, pero no indica nada en relación a la precisión en una malla, o a la relación de convergencia. En el siguiente apartado se tratará con detalle este tema.

Para el caso de elasticidad, el grado máximo de derivación en la expresión de la energía potencial total es $m = 1$. Como las deformaciones son primeras derivadas de los desplazamientos, el requisito 3 impone que en una malla cada elemento pueda representar cualquier estado de deformación constante si se aplican las condiciones de contorno apropiadas. Un caso concreto de deformación constante es la deformación nula, que aparece cuando los desplazamientos nodales corresponden a un movimiento de cuerpo rígido (traslaciones o rotaciones). El grado polinómico completo mínimo será 1 y solo será necesario que se cumpla la continuidad en los campos de desplazamientos supuestos en la frontera entre elementos.

La continuidad entre elementos se denomina usualmente C^i , indicando el superíndice el orden de derivación que presenta continuidad. En el caso de la elasticidad, el orden de continuidad exigido es C^0 ya que solo es necesario que exista continuidad en las funciones de interpolación de los desplazamientos y no en sus derivadas.

Una explicación física del requisito 3 es la siguiente. A medida que la malla se refina, el tamaño de los elementos tiende a cero. A medida que el tamaño del elemento tiende a cero, la deformación en cualquier punto dentro del mismo tiende a ser constante. Si un elemento no puede representar estados de deformación constante en el límite (cuando el tamaño del elemento tiende a cero), la solución correcta no se alcanzará al refinar sucesivamente la malla.

TEMA 4.-

INTERPOLACIÓN. FUNCIONES DE FORMA DE CONTINUIDAD C^0

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| 1.- INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1.- REQUISITOS DE INTERPOLACIÓN | 3 |
| 2.- FORMAS BÁSICAS DE ELEMENTOS. CLASIFICACIÓN | 4 |
| 2.1.- ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES | 4 |
| 2.2.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES | 5 |
| 2.3.- ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES | 6 |
| 3.- INTERPOLACIÓN NODAL. FUNCIONES DE FORMA..... | 7 |
| 4.- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE FORMA | 9 |
| 5.- ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES | 11 |
| 6.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES..... | 12 |
| 6.1.- PROBLEMÁTICA DE LA INTERPOLACIÓN EN COORDENADAS GLOBALES | 12 |
| 6.2.- ELEMENTOS CUADRILÁTEROS | 13 |
| 6.2.1.- ELEMENTOS LAGRANGIANOS | 14 |
| 6.2.2.- ELEMENTOS SERENDÍPITOS | 15 |
| 6.2.3.- DETERMINACIÓN DE FUNCIONES DE FORMA | 16 |
| 6.3.- ELEMENTOS TRIANGULARES | 18 |
| 6.3.1.- COORDENADAS DE ÁREA..... | 19 |
| 6.3.2.- COORDENADAS NORMALIZADAS | 20 |
| 7.- ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES | 21 |
| 8.- TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS. | 23 |
| 8.1.- ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS..... | 23 |
| 8.2.- CÁLCULO DE MATRICES DE ELEMENTO. | 24 |
| 9.- INTEGRACIÓN NUMÉRICA. | 26 |
| 9.1.- INTEGRACIÓN NUMÉRICA UNIDIMENSIONAL | 26 |
| 9.2.- INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN 2D Y 3D | 28 |
| 9.3.- ORDEN DE INTEGRACIÓN REQUERIDO. INTEGRACIÓN REDUCIDA..... | 28 |
| 10.- FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS. | 33 |

1.- INTRODUCCIÓN

En elementos finitos, las funciones incógnita se sustituyen por una función aproximada, construida a tramos dentro de cada elemento. En general se utilizan funciones de interpolación polinómicas. Tales funciones permiten formular de forma más sencilla el método de los elementos finitos, facilitan los cálculos numéricos (específicamente la derivación e integración), y permiten aumentar la precisión incrementando el orden del polinomio de interpolación (en teoría, un polinomio de orden infinito corresponde a la solución exacta). Las funciones trigonométricas también poseen algunas de estas propiedades, aunque se utilizan mucho menos que las polinómicas en elementos finitos.

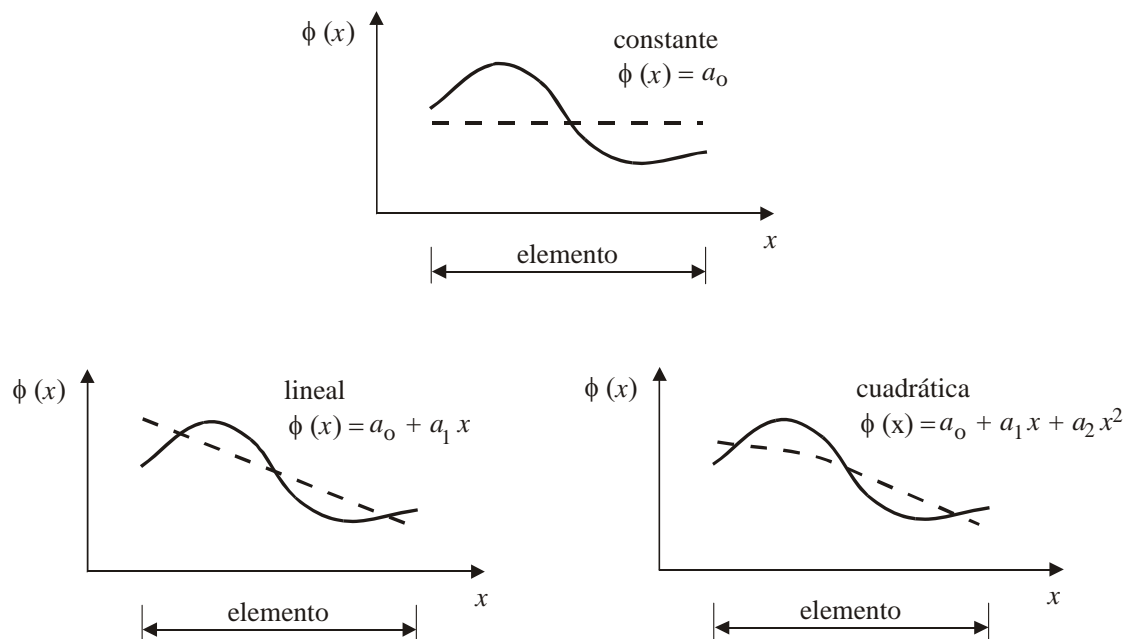


Figura 1.- Interpolación polinómica unidimensional.

En elementos finitos, la interpolación dentro de cada elemento se plantea mediante las funciones de forma. Así, si queremos interpolar la función ϕ en función del valor de un conjunto de parámetros (a_i) para cada elemento, tendremos que buscar las funciones de forma N_i tales que

$$\phi(x, y, z) \approx \sum N_i(x, y, z) a_i = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{a}^e \quad (1)$$

donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma (que depende de las coordenadas espaciales) y \mathbf{a}^e es el vector que contiene el valor de los parámetros (grados de libertad) del elemento. En elementos finitos convencionales, la interpolación se realiza tomando como grados de libertad el valor de la función incógnita en los nodos. De esta forma, la interpolación se puede expresar como:

$$\phi(x, y, z) \approx \sum N_i(x, y, z) \phi_i = \mathbf{N}(x, y, z) \boldsymbol{\phi}^e \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{\phi}^e$ es el vector que contiene el valor de la función incógnita en los nodos. Esto se denomina interpolación nodal. Sin embargo, existe otro tipo de elementos denominados

jerárquicos que se basan en una interpolación no nodal, de forma que la interpolación se establece en función de parámetros o grados de libertad no nodales. En este tema se resumirá la formulación de los elementos finitos convencionales y se hará una introducción a los elementos finitos jerárquicos.

Las funciones de interpolación, y en consecuencia las funciones de forma, no pueden elegirse arbitrariamente. Existen ciertos criterios derivados de orden polinómico, completitud y de continuidad entre elementos que deben cumplirse para asegurar la convergencia a la solución exacta a medida que el tamaño de los elementos tiende a cero. Con respecto a continuidad, dependiendo del tipo de problema se requerirá únicamente continuidad C^0 (continuidad únicamente en la función interpolada, como en el caso del problema elástico) u órdenes de continuidad mayores. En este tema se considerará únicamente la interpolación de elementos finitos de continuidad C^0 .

La interpolación puede plantearse en coordenadas globales o en coordenadas locales. En el primer caso, las funciones de forma se expresan directamente en función de las coordenadas espaciales (x,y,z) . En el segundo caso se consideran unas coordenadas locales de forma que en ellas, el elemento tiene una forma normalizada (ver Figura 2) y se plantean las funciones de forma en base a estas coordenadas locales (ξ,η,τ) . Este segundo planteamiento es equivalente a considerar la existencia de una transformación de coordenadas entre el elemento estándar y el elemento real, por lo que la interpolación está definida conjuntamente por la interpolación en coordenadas locales más la transformación de coordenadas.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, \tau) &\approx \sum N_i(\xi, \eta, \tau) a_i = \mathbf{N}(\xi, \eta, \tau) \mathbf{a}^e \\ x = x(\xi, \eta, \tau) \quad ; \quad y = y(\xi, \eta, \tau) \quad ; \quad z = z(\xi, \eta, \tau) \end{aligned} \quad (3)$$

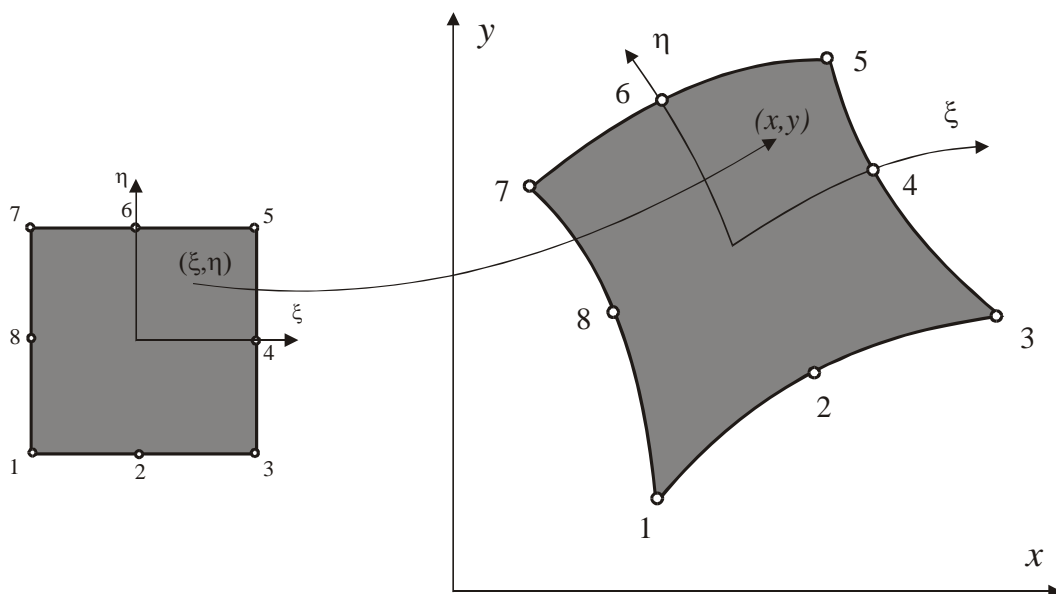


Figura 2.- Elemento de referencia y elemento real. Coordenadas globales y locales.

Para cumplir los requisitos de la interpolación necesarios para asegurar la convergencia de elementos finitos, y facilitar las operaciones a efectuar con las funciones de forma (en concreto en relación con la integración), se utiliza generalmente el planteamiento de interpolación en coordenadas locales.

1.1.- Requisitos de interpolación

Para que el método de los elementos finitos presente convergencia es necesario que la interpolación cumpla determinadas condiciones. En el caso de la elasticidad es necesario que la interpolación presente continuidad C^0 en las fronteras entre elementos, de forma que es necesario que exista únicamente continuidad en las funciones a interpolar y no es necesaria en sus derivadas. Además, será obligatorio la inclusión de ciertos términos en el desarrollo polinómico, en concreto el término constante y los lineales (para poder simular correctamente los movimientos de cuerpo rígido y los estados de deformación constante).

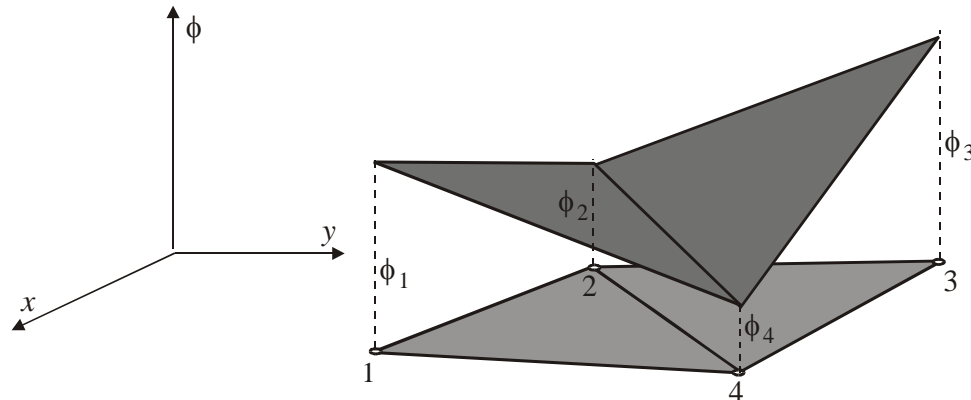


Figura 3.- Continuidad C^0 entre elementos.

Por otra parte, en elementos bidimensionales y tridimensionales, es conveniente que el tipo de interpolación sea similar en cualquier dirección (isotropía o invarianza geométrica) para que pueda representarse el mismo tipo de variación de la función incógnita en cualquier dirección.

Para conseguir isotropía geométrica es necesario incluir de forma simétrica los términos del triángulo de Pascal en 2-D y los del tetraedro de Pascal en 3-D

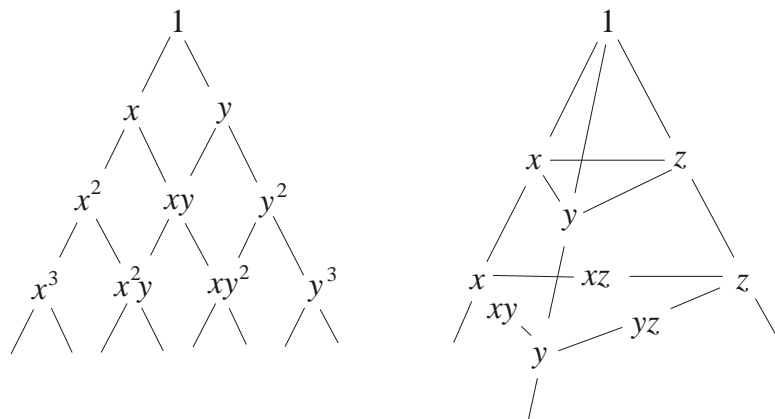


Figura 4.- Triángulo y tetraedro de Pascal.

Por último, la aproximación polinómica puede considerarse como un desarrollo en serie de la función incógnita dentro de cada elemento. Por este motivo, el error cometido en la interpolación dependerá del orden del polinomio completo incluido en la interpolación y no del término de mayor grado. Así pues, es conveniente intentar incluir todos los términos de un cierto grado antes de incluir términos superiores aisladamente.

2.- FORMAS BÁSICAS DE ELEMENTOS. CLASIFICACIÓN

La mayor parte de los elementos finitos son geoméricamente simples, de forma que sea posible modelar cualquier dominio de forma arbitraria. El número de nodos del elemento depende del tipo de variables nodales, del tipo de funciones de interpolación y del grado de continuidad requerido.

2.1.- Elementos unidimensionales

Los elementos utilizados en problemas unidimensionales son los mostrados en la siguiente figura. En principio no parece atrayente la idea de utilizar elementos finitos en problemas unidimensionales, ya que están gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias y no en derivadas parciales. No obstante, en ciertas ocasiones será el enfoque más interesante, ya que permitirá una mayor generalidad y además será posible utilizarlos en análisis geoméricamente más complejos. Este es el caso de utilizar elementos lineales para simular rigidizadores en una estructura tridimensional.

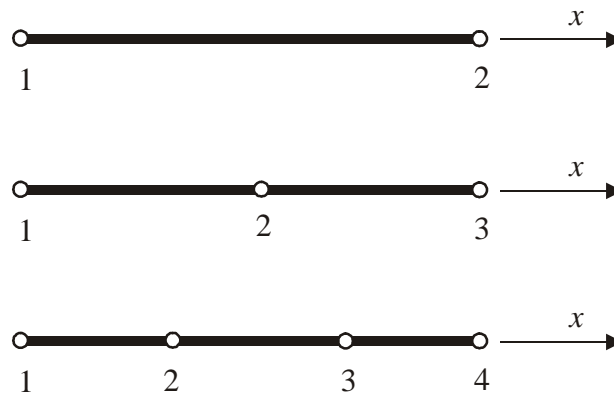
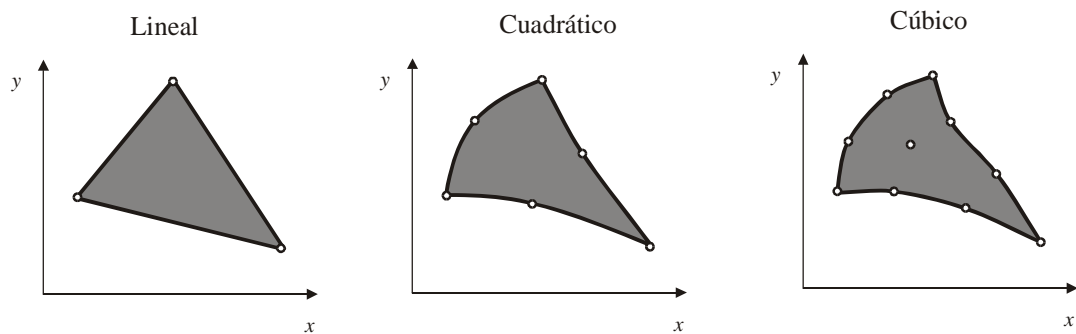


Figura 5.- Familia de elementos unidimensionales.

2.2.- Elementos bidimensionales

En la Figura 6 se muestran los elementos bidimensionales más usuales. Se pueden definir básicamente dos familias, la triangular y la cuadrilátera. Los elementos más sencillos de cada familia son el triangular de tres nodos y el cuadrilátero de cuatro. Ambos elementos son de lados rectos. En ocasiones se forma el elemento cuadrilátero mediante dos elementos triangulares. Elementos de orden superior son los cuadráticos (triangular de seis nodos y rectangular de ocho nodos), cúbicos, etc. En estos elementos se definen funciones de interpolación polinómica de mayor orden y pueden tener los lados curvos (formulación isoparamétrica) con lo que se pueden utilizar para aproximar contornos curvos con un número reducido de elementos.

ELEMENTOS TRIANGULARES



ELEMENTOS CUADRILATEROS

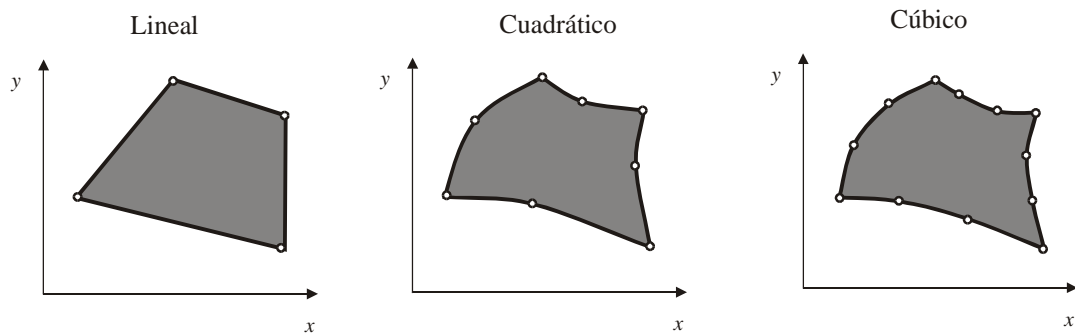


Figura 6.- Familias de elementos bidimensionales.

2.3.- Elementos tridimensionales

En el caso tridimensional existen básicamente la familia de elementos tetraédricos y la de hexaédricos y la de prismas triangulares (ver Figura 7). El número de nodos determinará el orden polinómico de interpolación de forma similar a los casos anteriores.

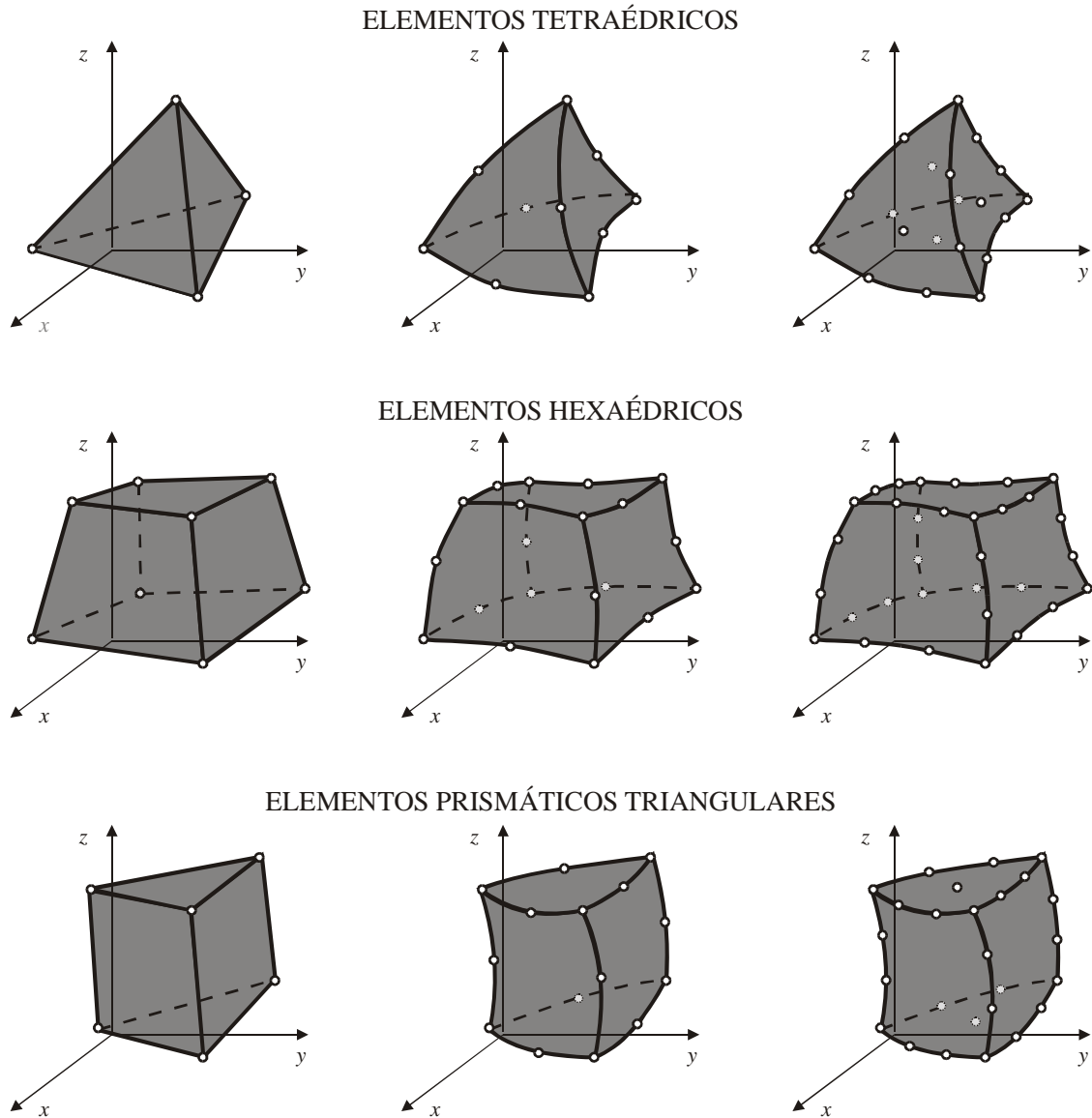


Figura 7.- Familias de elementos tridimensionales.

3.- INTERPOLACIÓN NODAL. FUNCIONES DE FORMA

En cualquier elemento finito, si una variable cualquiera $\phi(x,y,z)$ se interpola polinómicamente tendremos

$$\phi(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots + \alpha_n x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & \dots & x^\alpha y^\beta z^\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (4)$$

Donde el vector \mathbf{p} contiene los términos del desarrollo polinómico y el vector $\boldsymbol{\alpha}$ contiene los coeficientes de interpolación. Consideremos el elemento definido por un total de q nodos. Denominando por ϕ_j al valor de la función ϕ en el nodo j , definido en las coordenadas (x_j, y_j, z_j) , tendremos

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & \dots \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & \dots \\ 1 & x_3 & y_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_q & y_q & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\phi}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (5)$$

Donde $\boldsymbol{\phi}^e$ representa el vector que contiene el valor de la función ϕ en todos los nodos del elemento y \mathbf{C} es una matriz $(q \times n+1)$ función de la posición de los puntos nodales. Considerando que $q = n+1$ y que existe la inversa de la matriz \mathbf{C}

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}^e \quad (6)$$

y, sustituyendo este resultado en la ecuación (4)

$$\phi(x,y,z) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}^e \quad (7)$$

La matriz $\mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1}$ define las denominadas funciones de forma, y puede escribirse como $\mathbf{N}(x)$. Las funciones de forma son funciones de las coordenadas espaciales y de las coordenadas de los nodos que definen el elemento. De esta forma, en general la interpolación polinómica podrá escribirse como

$$\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y, z) \phi_i \quad (8)$$

Planteando la interpolación polinómica mediante funciones de forma es posible separar las funciones de interpolación $N_i(x,y,z)$ del valor de la función interpolada en los nodos, ϕ_i . Evidentemente, una primera condición para poder realizar la interpolación es que el

número de términos del desarrollo polinómico ($n+1$) sea igual al número de nodos del elemento (q).

En el caso de que exista más de un grado de libertad por nodo, se deberá realizar una interpolación polinómica para cada grado de libertad. Por ejemplo, en el caso de elasticidad bidimensional, cada nodo tiene asociado dos variables incógnita (desplazamientos u y v del nodo en las direcciones coordenadas x e y). Suponiendo el mismo tipo de interpolación para ambos desplazamientos

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y)u_i \quad ; \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y)v_i \quad (9)$$

o bien, en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{u}^e \quad (10)$$

El cálculo de las funciones de forma a partir de la expresión $\mathbf{N} = \mathbf{P}^T \mathbf{C}^{-1}$ debe realizarse de forma analítica ya que en elementos finitos será necesario obtener las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas. El cálculo explícito según tal expresión puede ser complejo para elementos con un gran número de nodos, con lo que en general se buscarán las funciones de forma directamente.

Además, si aplicamos el procedimiento descrito en coordenadas espaciales, no es posible garantizar que se cumplan las condiciones necesarias para asegurar la convergencia. Por este motivo, en general se plantearán las funciones de forma considerando coordenadas locales (o elemento de referencia).

4.- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

A partir de la definición de las funciones de forma de la ecuación 8 se puede deducir directamente que cada función de forma tiene valor unidad en su nodo de definición y cero en los restantes, es decir

$$N_j(x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

Además, en el caso de la elasticidad, para que exista continuidad C^0 en la frontera entre elementos, es necesario que en cada una de las fronteras del elemento la interpolación dependa exclusivamente de las funciones de forma de los nodos que pertenecen a tal frontera. En consecuencia, la función de forma asociada a un nodo debe ser nula en los contornos en los que no esté presente dicho nodo. Además, y para conseguir convergencia, es necesario retener los términos constantes y lineales del polinomio de interpolación.

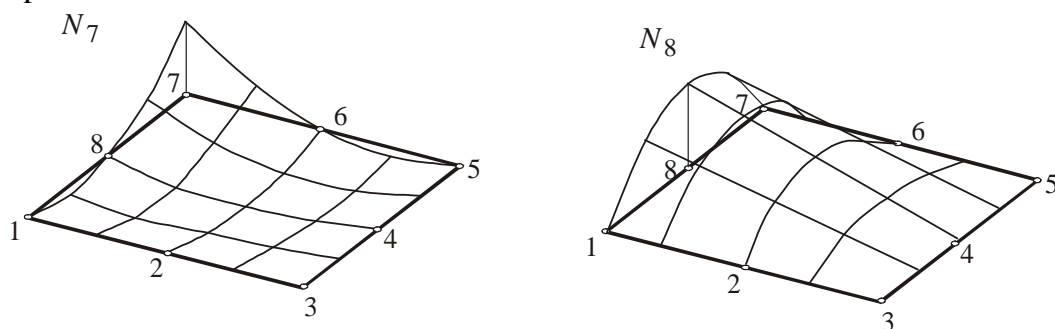


Figura 8.- Funciones de Forma.

Otra propiedad interesante de las funciones de forma, que puede ser utilizada para comprobar que las funciones de forma de un elemento son correctas, viene dada por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{N_f} N_i(x, y, z) = 1 \quad (12)$$

donde N_f representa el número de funciones de forma del elemento. Esta expresión se cumple para cualesquiera valores de las coordenadas (x, y, z) .

La demostración de esta expresión resulta sencilla. Supóngase que se desea interpolar una función que toma un valor constante k en un punto cualquiera mediante el uso de funciones de forma. Puesto que la función es constante el valor de la función tanto en los nodos como en el punto donde es interpolada será k :

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_f} (N_i(x, y, z) \cdot f(x_i, y_i, z_i))$$

$$k = \sum_{i=1}^{N_f} (N_i(x, y, z) \cdot k)$$

$$k = k \sum_{i=1}^{N_f} N_i(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N_f} N_i(x, y, z) = 1$$

5.- ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

La condición de continuidad C^0 debe cumplirse en los nodos de conexión con otros elementos (nodos extremos del elemento), y se verifica automáticamente si se cumplen las condiciones definidas en la ecuación 11 y se retienen los términos constantes y lineales.

Considerando un elemento unidimensional definido por un total de 'q' nodos, se puede definir el polinomio de Lagrange asociado al nodo 'I' como:

$$l_I^{q-1}(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{I-1})(x - x_{I+1}) \dots (x - x_q)}{(x_I - x_1) \dots (x_I - x_{I-1})(x_I - x_{I+1}) \dots (x_I - x_q)} \quad (13)$$

Estos polinomios cumplen las condiciones necesarias para las funciones de forma, y por lo tanto se definen como

$$N_I(x) = l_I^{q-1}(x) \quad (14)$$

En coordenadas locales, el elemento de referencia unidimensional está definido en $[-1, 1]$ y tiene los nodos distribuidos uniformemente:

En la figura se muestran las funciones de forma asociadas a los elementos lineal y cuadrático unidimensionales en coordenadas locales

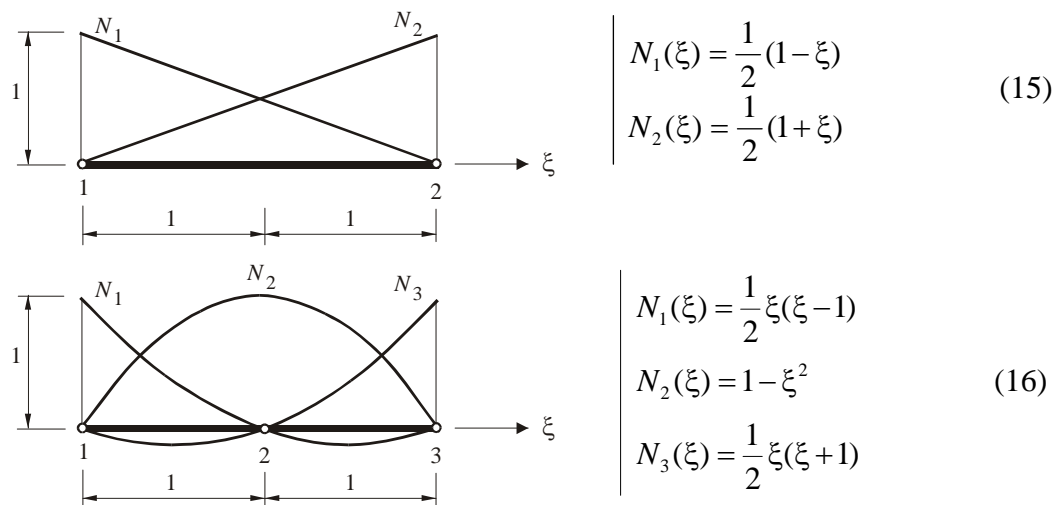


Figura 9.- Funciones de forma de los elementos lineal y cuadrático unidimensionales.

6.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

6.1.- Problemática de la interpolación en coordenadas globales

En el caso unidimensional la continuidad C^0 entre elementos queda garantizada independientemente de si la interpolación se realiza en coordenadas locales o en coordenadas globales ya que la conexión entre elementos contiguos se realiza únicamente a través de los nodos extremos. Sin embargo la continuidad C^0 no siempre puede garantizarse en elementos bidimensionales (o tridimensionales) en el caso de utilizar interpolación en coordenadas globales ya que los elementos contiguos están conectados mediante nodos y aristas (o nodos, aristas y caras en el caso 3D). Considérese como ejemplo el elemento cuadrilátero lineal mostrado en la Figura 10.

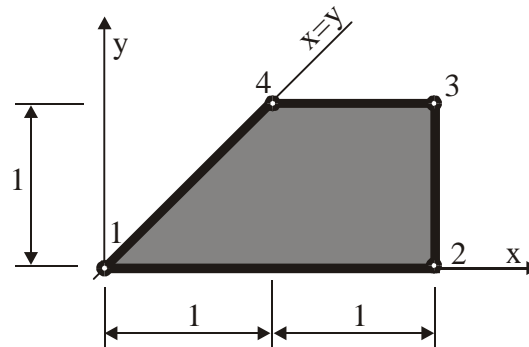


Figura 10.- Elemento cuadrilátero lineal.

Supóngase que se desea determinar el valor de los desplazamientos horizontales u utilizando interpolación en coordenadas globales considerando un polinomio de interpolación del tipo:

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (17)$$

Considerando el procedimiento descrito en el apartado 3.- se obtienen las siguientes funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= 1 - \frac{x}{2} - y + \frac{xy}{2} \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2}(x - xy) \\ N_3(x, y) &= -y + xy \\ N_4(x, y) &= 2y - xy \end{aligned} \quad (18)$$

La interpolación de desplazamientos en la recta $x=y$ será:

$$u(x, x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{2} + (2u_4 - u_3 - u_1)x + \left(u_3 - u_4 - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) x^2 \quad (19)$$

Como se puede observar los desplazamientos en la recta $x=y$, que coincide con el lateral 1-4, no son funciones lineales como correspondería a un contorno de 2 nodos. Además el desplazamiento de los puntos del lateral 1-4 depende de los desplazamientos de los nodos 1 y 4, pero también del desplazamiento de los nodos 2 y 3. Así pues, según lo expuesto en el apartado 4.- no es posible garantizar la continuidad C^0 de este elemento con otro elemento adyacente a él en el lateral 1-4 ya que el elemento adyacente no contendría a los nodos 2 y 3 del elemento de la Figura 10, con lo que la interpolación de desplazamientos sobre la recta $x=y$ de este elemento sería distinta a la de la ecuación (19).

La interpolación en el elemento de referencia garantiza la continuidad C^0 de las funciones interpoladas por lo que en general este tipo de sistemas de referencia será el utilizado para la interpolación de funciones en elementos finitos. Cuando se utiliza interpolación en coordenadas globales la continuidad C^0 tan solo puede ser garantizada con los elementos triangulares lineales (2D) y los tetraedros lineales (3D) ya que estos elementos no incluyen ninguno de los términos cuadráticos en sus funciones de interpolación.

Adicionalmente, puesto que todos los elementos en coordenadas globales de un mismo tipo siempre tienen la misma representación en coordenadas locales o de referencia (ver Figura 2), la utilización de funciones de forma en dicho sistema de referencia tiene la ventaja de una mayor simplicidad de los límites de integración.

6.2.- Elementos cuadriláteros

El elemento de referencia y las coordenadas normalizadas que se utilizan en los elementos cuadriláteros son los que se muestran en la Figura 11.

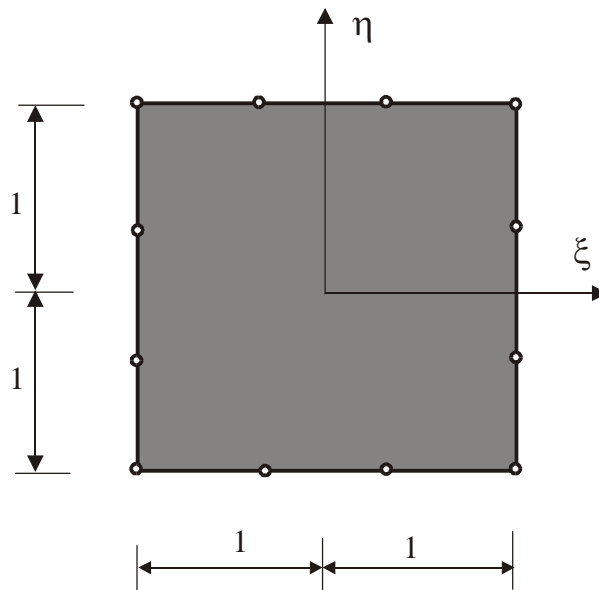


Figura 11.- Elemento Cuadrilátero. Elemento y coordenadas de referencia.

6.2.1.- Elementos Lagrangianos

Un primer grupo de elementos cuadriláteros son los de la familia de Lagrange. Este elemento tiene dispuestos los nodos (en el contorno e interiores) en forma de malla regular, como se muestra en la Figura 12.

Veamos cómo se puede obtener directamente la función de forma asociada al nodo (I,J) de un elemento cualquiera de la familia de Lagrange. La función de forma la podemos obtener como el producto de dos polinomios, uno definido en ξ y el otro definido en η (que toman valor unidad en el nodo considerado y cero en el resto). El producto de ambos polinomios dará la unidad en el nodo (I,J) , cero en los restantes y satisfará la continuidad C^0 entre elementos. Además, tendrá incluidos los términos constantes y lineales en la interpolación.

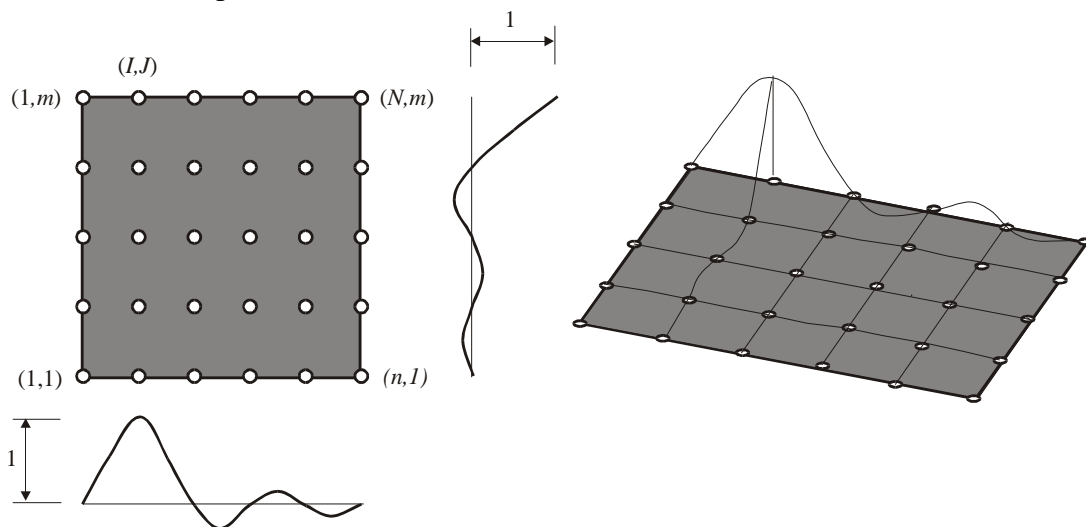


Figura 12.- Elemento cuadrilátero de Lagrange.

Los polinomios de Lagrange de una variable cumplen las condiciones antes mencionadas y, por lo tanto, las funciones de forma se pueden definir como el producto de dos polinomios de Lagrange, cada uno de ellos definido en la coordenada correspondiente:

$$N_{IJ} = l_I^{n-1}(\xi)l_J^{m-1}(\eta) \quad (20)$$

Las funciones de forma de los elementos de la familia de Lagrange son fáciles de formular, sin embargo, en la práctica no se suelen utilizar frecuentemente ya que pese a que en el polinomio resultante aparecen términos de grado elevado, prescinden de términos de menor grado, con lo que el polinomio completo resultante no es muy eficaz.

Por ejemplo, para aquellos elementos en los que $m = n$, aparecen términos de grado n^2 ($\xi^n \eta^n$), y sin embargo el polinomio completo es de grado n . En la Figura 13 se muestra en el triángulo de Pascal la distribución de términos polinómicos para el cuadrilátero cuadrático de esta familia de elementos.

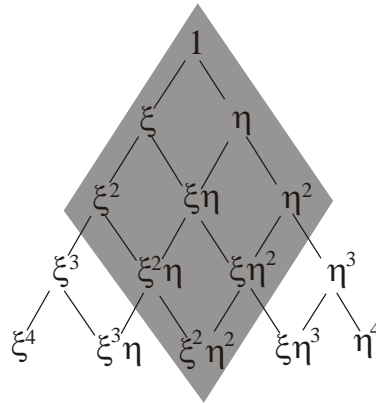


Figura 13.- Distribución de términos polinómicos en elementos de la familia de Lagrange para $m = n = 2$.

Por lo tanto los elementos de la familia de Lagrange introducen términos parásitos (aquellos de grado elevado que no están incluidos en el polinomio completo). El error cometido en la interpolación disminuirá a medida que el elemento tenga más nodos, pero a costa de aumentar excesivamente el número de *ddl* del problema.

Se ha de tener en cuenta que la existencia de términos parásitos en este tipo de elementos esta asociada a un exceso de nodos en su definición.

6.2.2.- Elementos serendípitos

Para mejorar esta situación, se tiende a situar los nodos en el contorno del elemento (necesarios para garantizar la continuidad C^0), e introducir los nodos interiores necesarios para conseguir polinomios completos. Bajo este enfoque surge la denominada familia serendípita. A continuación se representan los tres primeros elementos de esta familia, con sus correspondientes funciones de forma.

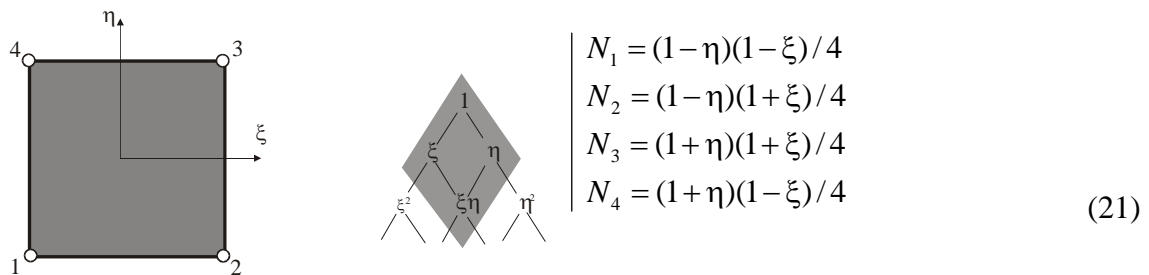
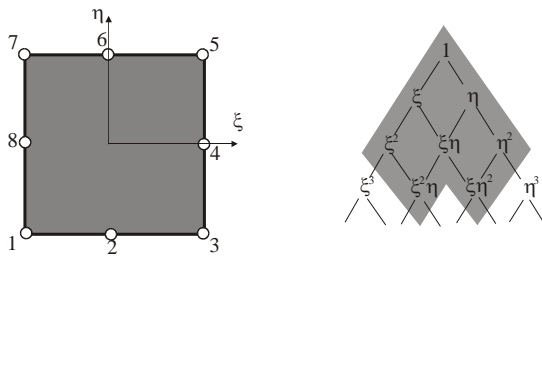
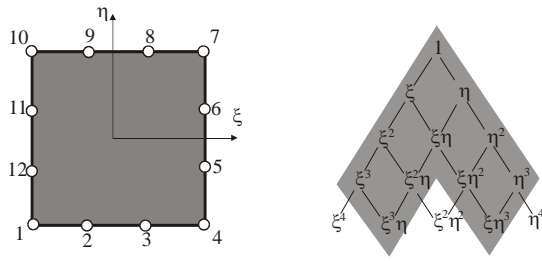


Figura 14.- Familia serendípita. Elemento lineal



$$\begin{aligned}
 N_1 &= -(1-\eta)(1-\xi)(1+\xi+\eta)/4 \\
 N_2 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\
 N_3 &= -(1-\eta)(1+\xi)(1-\xi+\eta)/4 \\
 N_4 &= (1-\eta^2)(1+\xi)/2 \\
 N_5 &= -(1+\eta)(1+\xi)(1-\xi-\eta)/4 \\
 N_6 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
 N_7 &= -(1+\eta)(1-\xi)(1+\xi-\eta)/4 \\
 N_8 &= (1-\eta^2)(1-\xi)/2
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Figura 15.- Familia serendípita. Elemento cuadrático



$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)[9(\xi^2+\eta^2)-10]/32 \\
 N_2 &= 9(1-\xi^2)(1-\eta)(1-3\xi)/32 \\
 N_3 &= 9(1-\xi^2)(1-\eta)(1+3\xi)/32 \\
 N_4 &= (1+\xi)(1-\eta)[9(\xi^2+\eta^2)-10]/32
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Figura 16.- Familia serendípita. Elemento cúbico

Inicialmente el desarrollo de las funciones de forma anteriores se realizó mediante inspección, requiriéndose cierto ingenio para la determinación de las funciones de forma de los elementos de más alto grado. Por esta razón se consideró adecuado denominar a esta familia de elementos como *serendípitos*, recordando a los príncipes de Serendip, famosos por sus descubrimientos casuales.

6.2.3.- Determinación de funciones de forma

Se expone a continuación el procedimiento que podría seguirse para determinar las funciones de forma de nodos vértice y de mitad de lado del elemento cuadrático. Este mismo procedimiento puede ser extrapolado a otros tipos de elementos.

Para determinar la función de forma de un nodo cualquiera se tendrá en cuenta la ecuación (11), según la cual las funciones de forma tomarán valor unitario en el nodo al que están asociadas, y nulo en el resto de nodos. Supóngase que se desea determinar la función de forma del nodo vértice del elemento mostrado en la Figura 17.a.

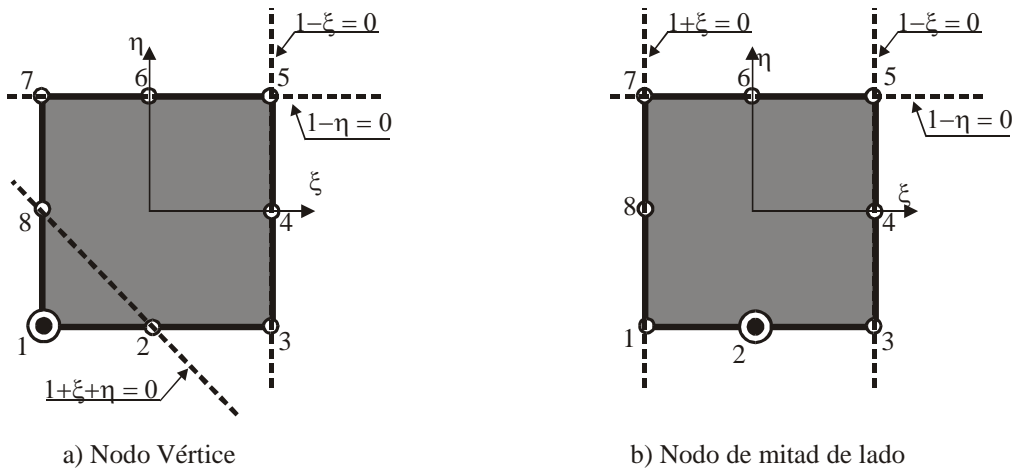


Figura 17.- Determinación de funciones de forma en elementos cuadriláteros serendípitos

Obsérvese que la recta $1-\xi=0$ contiene a los nodos 3, 4 y 5, por lo tanto, si la función de forma $N_1(\xi, \eta)$ contiene al término $1-\xi$, la función será nula en dichos nodos. De la misma forma, si $N_1(\xi, \eta)$ contiene al término $1-\eta$, la función será nula en los nodos 5, 6 y 7. Si además contiene al término $1+\xi+\eta$, correspondiente a la recta que pasa por los nodos 2 y 8, la función será nula en los nodos 2 y 8. De esta forma, la siguiente función será nula cuando se particularice en todos los nodos del elemento (salvo en el nodo 1)¹.

$$f(\xi, \eta) = (1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\xi+\eta)$$

Sin embargo esta función no puede ser utilizada como función de forma del nodo 1, ya que cuando se particulariza en las coordenadas del nodo 1 ($\xi = -1, \eta = -1$) se tendrá

$$f(-1, -1) = (1-(-1)) \cdot (1-(-1)) \cdot (1+(-1)+(-1)) = -4$$

Así pues si se divide la expresión de $f(\xi, \eta)$ por este resultado se obtendrá la función de forma $N_1(\xi, \eta)$ anteriormente mostrada en la ecuación (22):

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{f(\xi, \eta)}{f(-1, -1)} = \frac{(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\xi+\eta)}{-4} \quad (24)$$

De la misma forma se puede determinar la expresión de la función de forma $N_2(\xi, \eta)$, correspondiente a un nodo de mitad de lado (ver Figura 17.b). Si la función de forma incluye los términos $1-\xi$, $1+\xi$ y $1-\eta$, la función será nula respectivamente en los nodos 3, 4 y 5, en 7, 8 y 1 y en 5, 6 y 7:

$$f(\xi, \eta) = (1-\xi) \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta)$$

¹ En caso de utilizar este procedimiento para determinar las funciones de forma de elementos 3D se procederá a incluir en las funciones de forma las expresiones correspondientes a planos (en vez de rectas) que contienen a los nodos deseados.

Finalmente dividiendo la expresión de la ecuación anterior por su resultado cuando se particulariza en el nodo 2, de coordenadas (0,-1), se obtiene la función de forma buscada, anteriormente mostrada en la ecuación (22):

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{f(\xi, \eta)}{f(0, -1)} = \frac{(1-\xi) \cdot (1+\xi) \cdot (1-\eta)}{2} = \frac{(1-\xi^2) \cdot (1-\eta)}{2} \quad (25)$$

Como puede observarse este procedimiento de determinación de funciones de forma resulta significativamente menos laborioso que el planteado en el apartado 3.-. Por contra no se trata de un procedimiento sistemático y general para cualquier tipo de elemento, por lo que debe utilizarse con cuidado. Es importante comprobar que las funciones obtenidas sean válidas, es decir, que cumplan con todos los requisitos de una función de forma (aparte de los ya exigidos en el procedimiento, por ejemplo que incluya los términos polinómicos apropiados).

6.3.- Elementos triangulares

Los elementos triangulares tienen como primera ventaja sobre los cuadriláteros el que permiten aproximar de forma más sencilla cualquier contorno. Además, la disposición de los nodos en el elemento puede realizarse de forma evidente siguiendo el esquema del triángulo de Pascal, con lo que se podrán conseguir funciones de interpolación sin términos parásitos. Sin embargo, para un tamaño de elemento dado (definido por ejemplo como la longitud del lado mayor), el área cubierta por un elemento triangular será menor que la correspondiente a un elemento cuadrilátero, y en consecuencia será necesario utilizar un mayor número de elementos triangulares para mallar el mismo problema. En la figura siguiente se muestran los elementos lineal, cuadrático y cúbico de la familia de elementos triangulares.

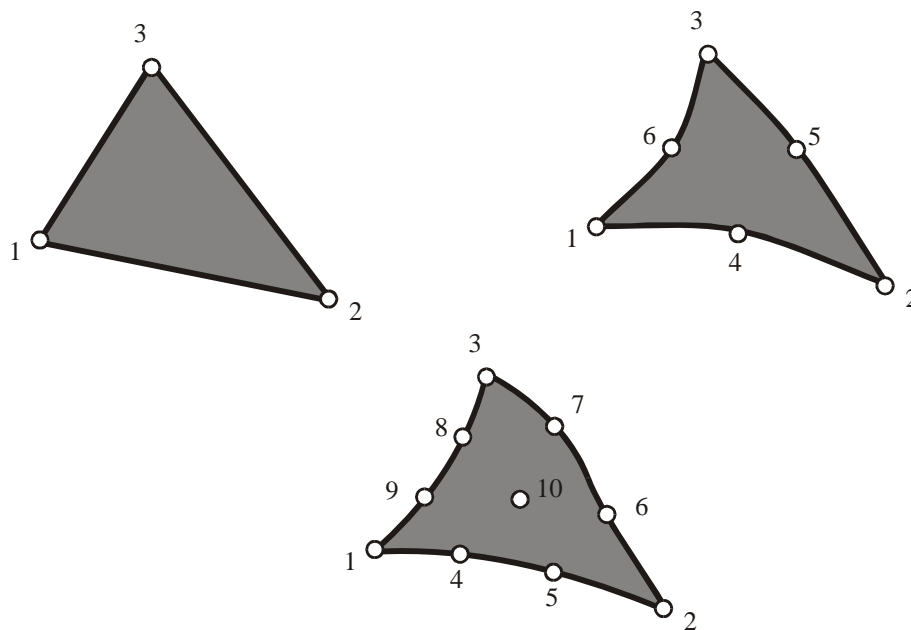


Figura 18.- Familia de elementos triangulares. Elementos lineal, cuadrático y cúbico.

6.3.1.- Coordenadas de área

Un tipo de coordenadas interesante en los elementos triangulares son las coordenadas de área L_1 , L_2 y L_3 (ver Figura 19). Cada coordenada de área se define como la relación entre la distancia de un punto al lado considerado y la altura total del triángulo con respecto a dicho lado. Cada coordenada varía por lo tanto entre 0 y 1. Se denominan coordenadas de área ya que representan la relación entre el área de la subregión triangular que definen y el área completa del triángulo. Las coordenadas de área no son independientes, cumpliéndose para cualquier punto del triángulo que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

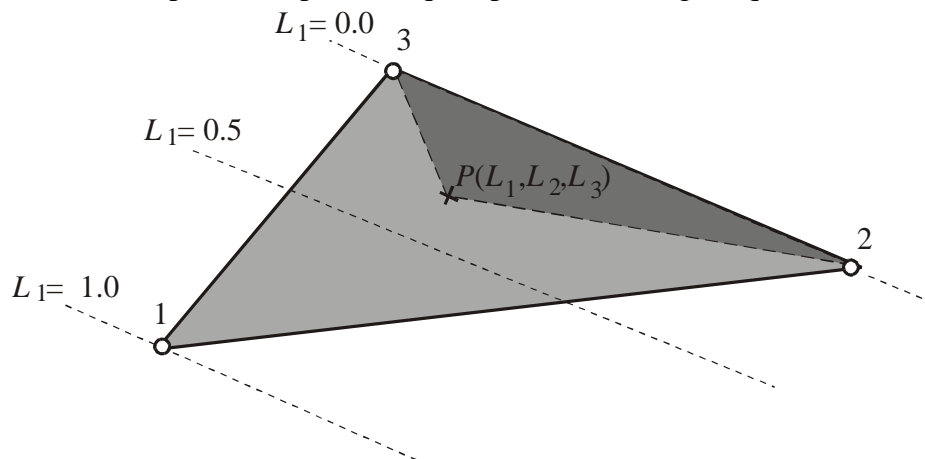


Figura 19.- Familia de elementos triangulares. Coordenadas de Área.

En el elemento triangular lineal, las funciones de forma deben ser tales que tengan valor unidad en su nodo de definición y cero en los restantes. Las coordenadas de área corresponden con esta definición. En consecuencia, las funciones de forma en coordenadas de área para el elemento triangular lineal serán las siguientes:

$$N_1=L_1; \quad N_2=L_2; \quad N_3=L_3 \quad (26)$$

Puede demostrarse fácilmente que las funciones de forma correspondientes al elemento triangular cuadrático son

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1-1)L_1, \quad \text{etc. (nodos vértice)} \\ N_2 &= 4L_1L_2, \quad \text{etc. (nodos en lado)} \end{aligned} \quad (27)$$

y para el elemento cúbico

$$\begin{aligned} N_1 &= (3L_1-1)(3L_1-2)L_1/2, \quad \text{etc. (nodos vértice)} \\ N_4 &= 9L_1L_2(3L_1-1)/2, \quad \text{etc. (nodos vértice)} \\ N_{10} &= 27L_1L_2L_3 \quad \text{(nodos interno)} \end{aligned} \quad (28)$$

Una ventaja de las coordenadas de área es la existencia de ecuaciones de integración que simplifican la evaluación de integrales de área, como las necesarias en el cálculo de la matriz de rigidez del elemento. Una expresión para la evaluación exacta de integrales de área, dependiente de las coordenadas de área es

$$\iint L_1^a L_2^b L_3^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \quad (29)$$

No obstante, exceptuando los casos correspondientes a elementos de contornos rectos, el integrando será más complejo (debido a la transformación de coordenadas locales a globales) y por lo tanto no se podrá aplicar directamente este resultado.

6.3.2.- Coordenadas normalizadas

Otra alternativa a las coordenadas de área consiste en utilizar coordenadas normalizadas ξ y η , de forma análoga al caso de elementos cuadriláteros. Normalmente el elemento de referencia utilizado corresponde a un triángulo rectángulo de base y altura unitaria, tal y como se muestra en las siguientes figuras. Siguiendo razonamientos análogos a los empleados en los elementos cuadriláteros, a continuación se muestran las funciones de forma de los elementos triangulares en coordenadas normalizadas.

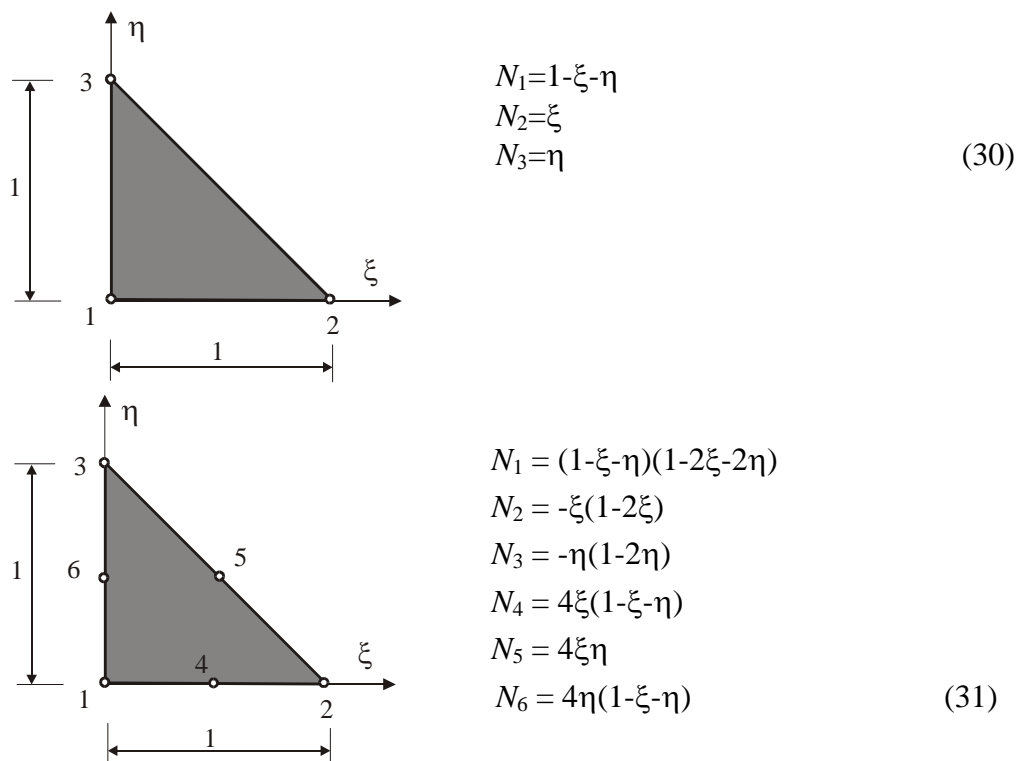


Figura 20.- Familia de elementos triangulares. Coordenadas normalizadas.

La utilización de estas coordenadas tiene como principal inconveniente que no trata de forma similar las diferentes direcciones del elemento.

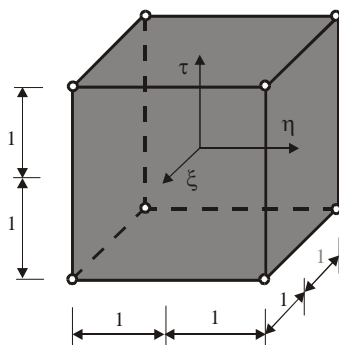
7.- ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

Los elementos tridimensionales son similares en cuanto a su formulación a los bidimensionales. En este caso, la conexión entre elementos se efectúa por nodos, aristas y caras, con lo que las condiciones de continuidad se deben de satisfacer entre aristas y caras de elementos.

Como ejemplo de elementos tridimensionales, en la Figura 21 se muestran los elementos hexaédricos lineal, cuadrático y cúbico de la familia serendípita, en los que se considera la definición de:

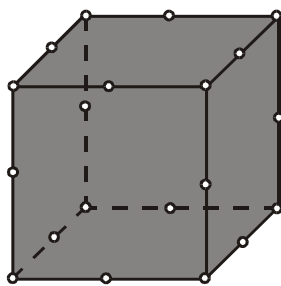
$$\xi_0 = \xi \xi_i ; \quad \eta_0 = \eta \eta_i ; \quad \tau_0 = \tau \tau_i \quad (32)$$

LINEAL



$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0) \quad (33)$$

CUADRÁTICO



Nodos Vértice:

$$N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0)(\xi_0 + \eta_0 + \tau_0 - 2)/8$$

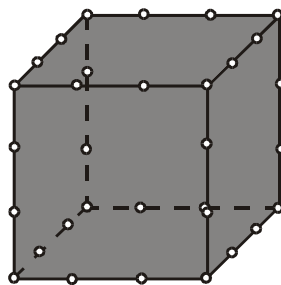
Nodos en lados:

$$\xi_i = 0 ; \quad \eta_i = \pm 1 ; \quad \tau_i = \pm 1$$

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0)/4$$

(34)

CUBICO



Nodos Vértice:

$$N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0)[9(\xi^2 + \eta^2 + \tau^2) - 19]/64$$

Nodos en lados:

$$\xi_i = \pm 1/3 ; \quad \eta_i = \pm 1 ; \quad \tau_i = \pm 1$$

$$N_i = 9(1 - \xi^2)(1 + 9\xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \tau_0)/64$$

(35)

Figura 21.- Elementos hexaédricos serendípitos.

De forma análoga al caso bidimensional, también se utilizan los elementos tetraédricos. Su formulación se puede plantear bien en coordenadas de volumen (análogas a las de área, para el caso tridimensional) o utilizando coordenadas locales en elementos de referencia.

8.- TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS.

En los apartados anteriores se han descrito las familias de elementos más usuales y se han obtenido las funciones de forma de los mismos para el caso de continuidad C^0 . Dichas funciones de forma se han obtenido considerando el elemento definido en sus coordenadas de referencia o coordenadas locales. Queda por lo tanto definir la forma de trasladar la interpolación a las coordenadas globales (reales) en las que se define el elemento y considerar la posibilidad de que los elementos de orden elevado tengan sus lados curvos. Esto se realiza mediante transformación de coordenadas.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (36)$$

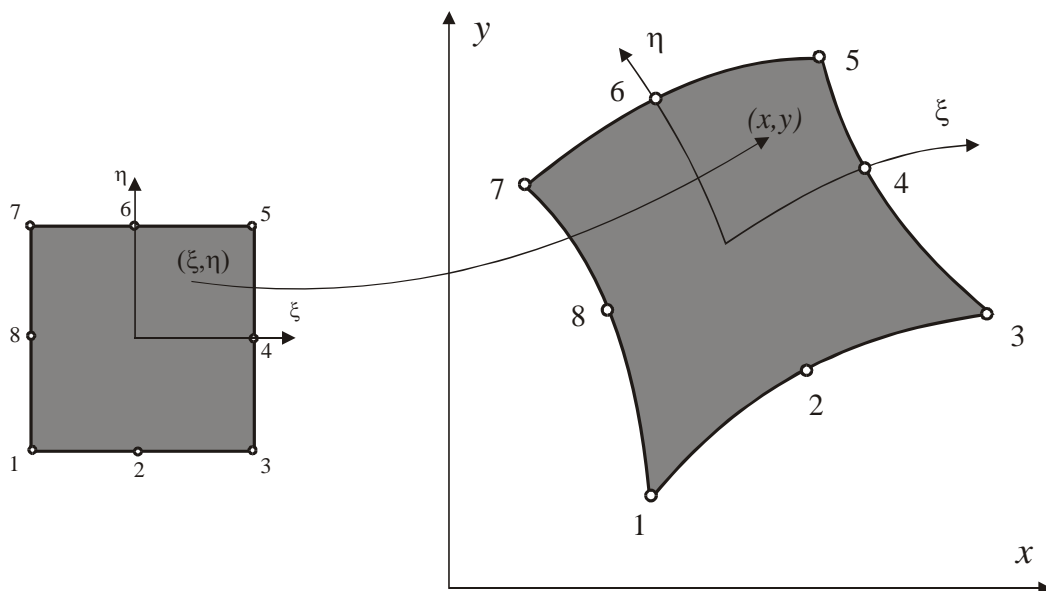


Figura 22.- Elemento de referencia y elemento real.

8.1.- Elementos isoparamétricos.

La forma más usual de realizar la transformación de coordenadas en elementos convencionales es utilizando funciones de forma. Así, conocidas las coordenadas globales de los puntos nodales, se pueden interpolar las coordenadas de un punto del elemento como:

$$\begin{cases} x = \sum N_i'(\xi, \eta, \tau) x_i \\ y = \sum N_i'(\xi, \eta, \tau) y_i \\ z = \sum N_i'(\xi, \eta, \tau) z_i \end{cases} \quad (37)$$

donde las funciones N_i' no son necesariamente las funciones de forma utilizadas en la interpolación de desplazamientos.

El elemento real, por lo tanto, se define mediante las coordenadas de sus nodos y la interpolación realizada. En concreto, la forma de frontera del elemento depende de la interpolación realizada a través de las funciones de forma, pudiendo dar lugar a contornos curvos. Las funciones de forma N_i' son función de las coordenadas locales del elemento, y deben ser tales que la interpolación resultante sea de continuidad C^0 en la frontera de los elementos. Si esto no se cumple, podrían aparecer solapamientos o lagunas en la frontera común a dos elementos (ver Figura 23). Por otra parte, dependiendo del valor de las coordenadas, el elemento puede estar excesivamente distorsionado, llegando en situaciones extremas a "plegarse" sobre sí mismo. Esta situación se representa en la Figura 23 y debe de ser detectada en el análisis ya que puede producir resultados erróneos.

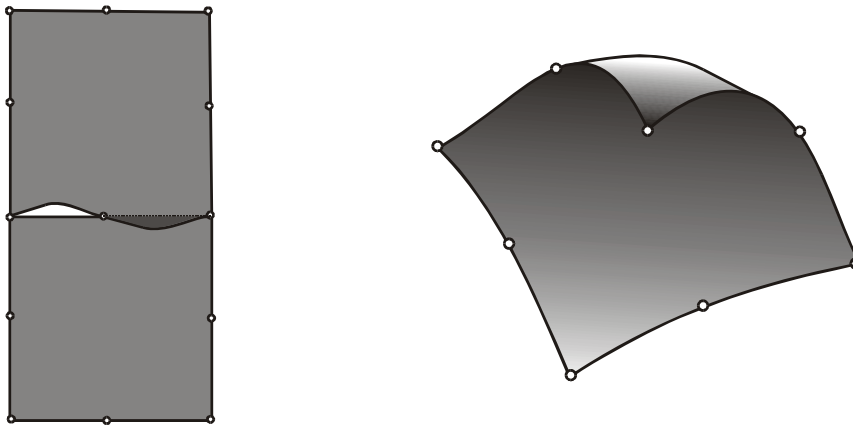


Figura 23.- Solapamientos y lagunas entre elementos y distorsión inaceptables del elemento debidas a la transformación de coordenadas.

Es posible utilizar en la interpolación de coordenadas nodos diferentes a los usados en la interpolación de las funciones incógnita del problema. No obstante, se suelen utilizar los mismos nodos (elementos isoparamétricos) y las mismas funciones de forma, satisfaciéndose por lo tanto, en general, la continuidad C^0 en la frontera entre elementos.

8.2.- Cálculo de matrices de elemento.

En general, en el cálculo de las matrices y vectores asociados al método de los elementos finitos, es necesario calcular las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales (recuérdese que la matriz \mathbf{B} utilizada en la evaluación de la matriz de rigidez \mathbf{K} , se evalúa como función de las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales). Las funciones de forma dependen explícitamente de las coordenadas locales, con lo que tales derivadas no son inmediatas.

La derivada de una función de forma con respecto a las coordenadas locales, se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Donde el vector de derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas locales es fácilmente evaluable ya que se dispone de su formulación explícita en dichas coordenadas. Para calcular la matriz \mathbf{J} (matriz jacobiana de la transformación de coordenadas) sólo debemos recordar que las coordenadas globales se interpolan mediante funciones de forma de las coordenadas nodales. Por ejemplo, como

$$x = \sum N_i(\xi, \eta, \tau) x_i \quad (39)$$

tendremos que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} x_i \quad (40)$$

El resto de elementos de la matriz jacobiana se obtiene de forma similar, en base a las derivadas de las funciones de forma y de las coordenadas de los puntos nodales.

Si la inversa de la matriz jacobiana existe, partiendo de la ecuación 38 se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \tau} \end{pmatrix} \quad (41)$$

El determinante de la matriz jacobiana relaciona un elemento diferencial definido como $dx dy dz$ con el elemento diferencial $d\xi d\eta d\tau$. De esta forma, siempre y cuando no existan degeneraciones del elemento existirá la inversa de la matriz jacobiana. El cálculo de tales derivadas se realiza en general numéricamente ya que la obtención de una fórmula explícita es compleja.

En base a lo anteriormente expuesto, y a modo de ejemplo, la evaluación de la matriz de rigidez de un elemento hexaédrico se calculará de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\tau \quad (42)$$

donde los términos de la matriz \mathbf{B} se evalúan según la ecuación (41).

9.- INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

Las matrices de elemento están definidas en elementos finitos mediante integrales. Exceptuando el caso de elementos muy sencillos, para realizar la integración se consideran coordenadas locales. Así, las integrales se transforman como

$$\int_{V_g} G(x, y, z) dx dy dz = \int_{V_i} G(\xi, \eta, \tau) |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\tau \quad (43)$$

En este caso, los límites de integración son sencillos (elemento de referencia), pero no así el integrando, que sólo puede evaluarse numéricamente, exceptuando el caso de elementos muy sencillos. En general, por lo tanto, se utilizará integración numérica.

9.1.- Integración numérica unidimensional

Veamos en primer lugar el caso de integración numérica unidimensional, para posteriormente extrapolar a casos bi y tridimensionales. En este caso, consideraremos integrales de la forma

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (44)$$

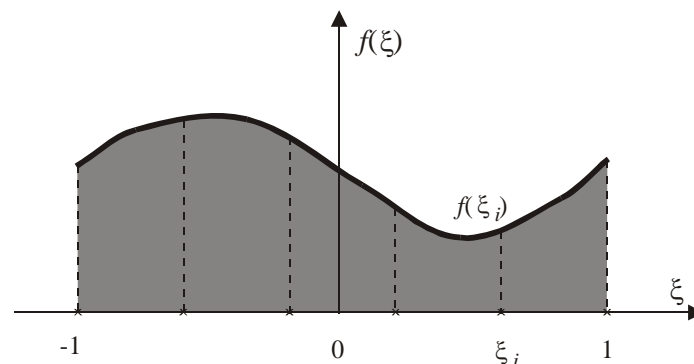


Figura 24.- Cuadratura de Newton-Cotes.

Un primer tipo de integración numérica es la denominada Cuadratura de Newton-Cotes. El procedimiento de integración mediante esta regla de cuadratura consiste en:

- 1.- definir a priori un número de puntos en el intervalo de integración (en general distribuidos uniformemente),
- 2.- ajustar el integrando a un polinomio que pase exactamente por tales puntos,
- 3.- obtener el resultado integrando exactamente tal polinomio.

Como n valores de la función definen un polinomio de grado $n-1$, el uso de n puntos de integración permitirá integrar exactamente un polinomio de grado $n-1$. En general, el uso de n puntos de integración producirá errores de orden de $O(h^n)$, siendo h el tamaño del elemento en coordenadas globales. Este método conduce a expresiones de la forma

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (45)$$

para los casos de 2, 3 y 4 puntos de integración se obtienen los siguientes resultados mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1.- Cuadratura de Newton-Cotes.²

| n | ξ_i | H_i | n | ξ_i | H_i | n | ξ_i | H_i |
|-----|---------|-------|-----|---------|-------|-----|---------|-------|
| 2 | -1.0 | 1.0 | 3 | -1.0 | 1/3 | 4 | -1.0 | 1/4 |
| | 1.0 | 1.0 | | 0.0 | 4/3 | | -1/3 | 3/4 |
| | | 1.0 | | 1/3 | 1/3 | | 3/4 | |
| | | | | | 1.0 | | 1/4 | |

Si en vez de especificar a priori los puntos de integración, se busca la posición de estos para que se obtenga la máxima precisión, para un número de puntos de integración dado, el resultado será más exacto. Considerando la expresión de la integración numérica como la definida en la ecuación 45, tendremos que determinar $2n$ incógnitas (H_i y ξ_i , $i=1, \dots, n$), con lo que en principio el polinomio será de grado $2n-1$ y el error en la interpolación de $O(h^{2n})$. Este procedimiento se denomina Cuadratura de Gauss, definiéndose en la Tabla 2 los puntos de integración³ y pesos asociados correspondientes a la integración unidimensional en el intervalo $[-1, 1]$.

Tabla 2.- Puntos de integración, pesos de la Cuadratura de Gauss y máximo grado de polinomios integrados exactamente

| n | $\pm\xi_i$ | H_i | Integra exactamente |
|-----|---------------------------------|-----------------------|---------------------|
| 1 | 0.0 | 2.000 000 000 000 000 | $p=1$ |
| 2 | $\pm 0.577\ 350\ 269\ 189\ 626$ | 1.000 000 000 000 000 | $p=3$ |
| 3 | $\pm 0.774\ 596\ 669\ 241\ 483$ | 0.555 555 555 555 556 | $p=5$ |
| | 0.000 000 000 000 000 | 0.888 888 888 888 889 | |
| 4 | $\pm 0.861\ 136\ 311\ 594\ 953$ | 0.347 854 845 137 454 | $p=7$ |
| | $\pm 0.339\ 981\ 043\ 584\ 856$ | 0.652 145 154 862 546 | |
| 5 | $\pm 0.906\ 179\ 845\ 938\ 664$ | 0.236 926 885 056 189 | $p=9$ |
| | $\pm 0.538\ 469\ 310\ 105\ 683$ | 0.478 628 670 499 366 | |
| | 0.000 000 000 000 000 | 0.568 888 888 888 889 | |
| 6 | $\pm 0.932\ 469\ 514\ 203\ 152$ | 0.171 324 492 379 170 | $p=11$ |
| | $\pm 0.661\ 209\ 386\ 466\ 265$ | 0.360 761 573 048 139 | |
| | $\pm 0.238\ 619\ 186\ 083\ 197$ | 0.467 913 934 572 691 | |

Evidentemente, debido a su mayor precisión para un mismo coste computacional, la regla de cuadratura de Gauss es más utilizada que la de Newton-Cotes.

² Las reglas de cuadratura de Newton-Cotes de 2 y 3 puntos de integración corresponden a los bien conocidos métodos de integración numérica del Trapecio y de Simpson respectivamente.

³ Los puntos de integración en la regla de cuadratura de Gauss (también llamada cuadratura de Gauss-Legendre) son los ceros de los polinomios de Legendre. Estos son un conjunto infinito de polinomios ortogonales entre si en el intervalo $[-1,1]$.

9.2.- Integración numérica en 2D y 3D

Para el caso de integraciones de área y de volumen, en el caso de elementos cuadriláteros y hexaédricos, como los límites de integración en cada coordenada son estándares (en el elemento de referencia), podemos extrapolar los resultados de las reglas de cuadratura unidimensional. Así, para integraciones de área y de volumen, tendremos

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (46)$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\xi_i, \eta_j, \tau_k) \quad (47)$$

En elementos triangulares y tetraédricos, los límites de integración incluirán a las propias variables, con lo que no es posible plantear la integración numérica extrapolando directamente el caso unidimensional. Para estos casos se han obtenido puntos de integración de Gauss específicos. La expresión utilizada para realizar la integración numérica en triángulos normalizados es:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (48)$$

En la siguiente tabla se muestran la situación de los puntos de integración y pesos obtenidos para el caso de triángulos en coordenadas normalizadas:

Tabla 3.- Puntos de integración, pesos de la Cuadratura tipo Gauss para triángulos en coordenadas normalizadas y máximo grado de polinomios 2D integrados exactamente

| n | ξ_i | η_i | H_i | Integra exactamente |
|-----|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| 1 | 1/3 | 1/3 | 1/2 | $p=1$ |
| 3 | 1/6 2/3 1/6 | 1/6 1/6 2/3 | 1/6 1/6 1/6 | $p=2$ |
| 3 | 1/2 1/2 0 | 0 1/2 1/2 | 1/6 1/6 1/6 | $p=2$ |
| 4 | 1/3 1/5 3/5 1/5 | 1/3 1/5 1/5 3/5 | -27/96 25/96 25/96 25/96 | $p=3$ |

9.3.- Orden de integración requerido. Integración reducida

Al sustituir la integración exacta por la numérica se cometerá un error adicional. Como al aumentar el número de puntos de integración el tiempo de cálculo aumenta, se debe de considerar el orden de integración necesario para preservar el orden de convergencia.

El orden de integración adecuado para evaluar una matriz de elemento específica de manera precisa puede ser determinado estudiando el orden de las funciones a integrar. Para el caso de la evaluación de la matriz de rigidez se ha de evaluar la expresión:

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| dV \quad (49)$$

donde la matriz \mathbf{B} esta expresada en función de las coordenadas normalizadas y la integración se realiza sobre el volumen del elemento en coordenadas locales. En esta expresión el integrando a evaluar es la función matricial \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}| \quad (50)$$

Estudiemos por ejemplo el caso de un elemento cuadrilátero de cuatro nodos de forma rectangular, de lados $2a$ en dirección x y $2b$ en dirección y . En este caso la matriz jacobiana será

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Puesto que \mathbf{J} es constante⁴, también lo será $|\mathbf{J}|$ y \mathbf{J}^{-1} (recuérdese que \mathbf{J}^{-1} es utilizada en la evaluación de la matriz \mathbf{B} , ver ecuación 41). La matriz \mathbf{B} estará por tanto compuesta por términos lineales en ξ o η . Así pues, para el elemento estudiado la matriz \mathbf{F} estará compuesta, a lo sumo, por términos cuadráticos ($\mathbf{F} = f(\xi^2, \xi\eta, \eta^2)$, $f(\)$ indica “función de”).

El uso de la regla de cuadratura de Gauss con dos puntos de integración en cada dirección permite evaluar de manera exacta la integral de funciones polinómicas cúbicas (Tabla 2). Por lo tanto la utilización de la cuadratura de Gauss con dos puntos de integración (en cada dirección) será adecuada en este caso.

Sin embargo se ha de tener en cuenta que si el elemento de 4 nodos considerado no es un paralelogramo, la matriz Jacobiana \mathbf{J} no será constante, por lo que \mathbf{J}^{-1} no será un polinomio de grado finito. Así pues, en principio, para evaluar la matriz de rigidez \mathbf{K}^e de manera muy precisa se debería de utilizar una regla de cuadratura de muy alto grado.

Al estudiar qué orden de integración es necesario para realizar la integración en elementos donde \mathbf{J} no es una matriz de términos constantes (elementos geoméricamente distorsionados) se observa que para calcular las integrales con un alto grado de precisión no suele ser necesario utilizar reglas de cuadratura de muy alto grado. Esto es debido a que la diferencia entre utilizar una regla que integre exactamente polinomios de grado p o $p-1$ suele ser despreciable.

Por tanto se ha de definir qué orden de integración es generalmente suficiente para realizar el cálculo de las matrices de elemento. La definición del mínimo orden de integración varía en función del autor consultado. A modo de ejemplo veamos el

⁴ Se puede comprobar que la matriz \mathbf{J} será también de términos constantes si el elemento es un paralelogramo de cuatro nodos cualesquiera.

número de puntos de Gauss recomendado por 3 autores distintos para el elemento cuadrilátero cuadrático de la familia serendípita:

- Zienkiewicz y Taylor recomiendan el uso de una regla de 2x2 puntos de Gauss
- Burnett recomienda utilizar en general 2x2 puntos de Gauss y 3x3 en el caso de elementos “considerablemente” distorsionados
- Bathe recomienda utilizar en general 3x3 puntos de Gauss y reglas de cuadratura de orden superior en caso de que la distorsión del elemento sea muy grande.

Plantaremos aquí la utilización del criterio propuesto por Burnett para determinar el mínimo número de puntos de integración requerido para cada elemento, que, para el caso en el que los elementos no estén excesivamente distorsionados, proporciona puntos de integración que coinciden con los llamados puntos de superconvergencia de tensiones⁵ que serán estudiados en un capítulo posterior.

Según Burnett la regla de integración utilizada debe preservar la velocidad de convergencia de la energía de deformación global. La energía de deformación tiene la siguiente expresión:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (51)$$

Para elementos de grado p se tendrán los siguientes órdenes de error de discretización en las diferentes magnitudes:

Desplazamientos: orden $O(h^{p+1})$,

Deformaciones (o tensiones): orden $O(h^p)$ ya que son primeras derivadas de los desplazamientos,

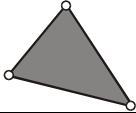
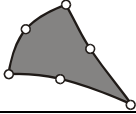
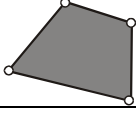
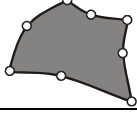
Energía de deformación: orden $O(h^{2p})$ (téngase en cuenta la expresión anterior).

Si el error de discretización en norma energética es de orden $O(h^{2p})$, según Burnett, el error debido a la regla de integración numérica utilizada tendrá que ser a lo sumo de ese mismo orden, por lo que deberá integrar exactamente polinomios de grado $2p-1$. Este autor utiliza el término *reducida* para denominar a este tipo de integración, denominando *reglas de cuadratura de grado superior* a las que tienen una precisión un orden superior, que también suelen ser llamadas *reglas de integración estándar*.

En función de lo anteriormente expuesto, y teniendo en cuenta la Tabla 2 y la Tabla 3, se muestran a continuación las reglas de cuadratura de Gauss a utilizar en los elementos 2D más comunes.

⁵ La precisión de los valores de tensión (o deformación) en un elemento de grado p evaluados en los puntos de superconvergencia corresponde a la que se obtendría en el elemento si este fuese de grado $p+1$.

Tabla 4.- Reglas de cuadratura de Gauss recomendadas por Burnett

| Elemento | Integración reducida | Integración estándar |
|---|----------------------|----------------------|
|  | 1 punto | 1 punto |
|  | 4 puntos | 6 puntos |
|  | 1 x 1 puntos | 2 x 2 puntos |
|  | 2 x 2 puntos | 3 x 3 puntos |

No es posible dar una regla general, aplicable a todo tipo de problemas, sobre el uso de integración reducida o estándar. La idoneidad del uso de una u otra dependerá del tipo de problema físico a resolver (tipo de ecuación diferencial), del tipo de elemento y del grado de distorsión de los elementos. Hay algunos tipos de problemas donde la integración reducida proporciona una precisión extraordinariamente mayor que la integración estándar⁶. De la misma forma existen situaciones en las que la utilización de integración reducida produce resultados desastrosos al producir singularidades en la matriz de rigidez. Incluso en ocasiones se utiliza integración reducida solamente sobre ciertos términos de las matrices de elemento.

En términos generales la integración reducida es la adecuada cuando los elementos están poco distorsionados mientras que la integración estándar es la más adecuada a medida que aumenta el grado de distorsión de los elementos.

Veamos una justificación del buen comportamiento de la integración reducida (pese a que con ella no se evalúen exactamente las integrales incluso para elementos no distorsionados). En la formulación en desplazamientos del método de los elementos finitos la rigidez del sistema resulta sobrestimada debido a la rigidización matemática impuesta por la aproximación de los desplazamientos, lo que hace que la energía de deformación resulte subestimada. Por lo tanto es posible esperar que el no evaluar exactamente las matrices de rigidez de elemento mediante la integración numérica compense en cierta medida la sobrestimación de la rigidez debida a la discretización. En otras palabras, la utilización de una regla de integración de menor grado que la requerida para evaluar exactamente la matriz de rigidez (en elementos no distorsionados) puede proporcionar una mayor precisión de los resultados.

Para complicar más la situación, en ocasiones existen varias reglas de cuadratura que proporcionan la misma precisión (en la Tabla 3 se mostraban 2 reglas de cuadratura tipo

⁶ Este tipo de comportamiento suele presentarse cuando uno de los parámetros físicos que describen el problema se aproxima a su límite, como es el caso de materiales casi-incompresibles o en problemas de placas delgadas.

Gauss para triángulos distintas con el mismo grado de precisión). La experimentación numérica suele ser necesaria en estos casos para determinar cual de las reglas tiene un mejor comportamiento.

Como ya se habrá podido comprobar la selección de la regla de cuadratura más adecuada es una tarea complicada. Los programas comerciales de elementos finitos frecuentemente permiten la utilización de varias reglas de cuadratura, proporcionando consejos sobre cual de ellas utilizar en función del tipo de problema analizado.

10.- FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS.

Los elementos que se han considerado hasta ahora, y en consecuencia las correspondientes funciones de forma, son los estándares. Sin embargo, esta formulación tiene ciertos inconvenientes cuando se utiliza en procesos adaptativos en los que se modifica el grado polinómico de la interpolación en los elementos. Las funciones de forma asociadas a un elemento son diferentes dependiendo del grado de la interpolación, con lo que una vez analizado un problema con un grado polinómico concreto, si aumentamos el grado de la interpolación deberemos repetir todos los cálculos. Considerar, como se muestra en la Figura 25, un caso unidimensional en el que se pretende pasar de una interpolación lineal a cuadrática. En este caso se añade un nuevo nodo al elemento finito y se modifican las funciones de forma. Como las funciones de forma son diferentes, las matrices correspondientes a cada elemento también lo serán y, por lo tanto, será necesario realizar de nuevo todos los cálculos.

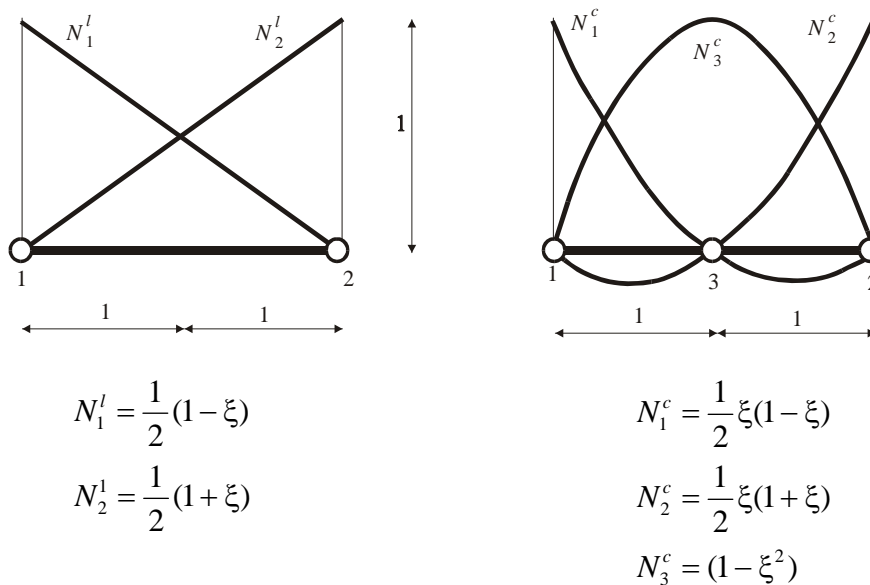


Figura 25.- Funciones de forma estándares para el caso unidimensional.
Interpolación lineal y cuadrática.

Los denominados elementos jerárquicos son una alternativa a los convencionales y permiten solucionar, en parte, este problema. La idea es que para aumentar el grado polinómico de la interpolación se añadan funciones de forma adicionales sin modificar las anteriores. De esta forma, parte de los cálculos previos son válidos y no tienen que volver a realizarse. Dado un elemento, se podrán añadir funciones de forma jerarquizadas que aumentarán el grado polinómico de la interpolación sin modificar las funciones de forma previas y sin aumentar el número de nodos del elemento. Las funciones de forma jerarquizadas tendrán asociados grados de libertad adicionales, aunque en este caso no representarán el valor de la función incógnita en ningún nodo.

Consideremos en primer lugar el caso unidimensional, inicialmente definido mediante interpolación lineal con las funciones de forma estándares:

$$u^{(1)}(\xi) = N_1^l(\xi)u_1 + N_2^l(\xi)u_2 \quad (52)$$

Para aumentar el grado de la interpolación, podemos incluir una nueva función de forma, N_2^j , y el correspondiente grado de libertad asociado, a_2 :

$$u^{(2)}(\xi) = N_1^l(\xi)u_1 + N_2^l(\xi)u_2 + N_2^j(\xi)a_2 \quad (53)$$

La función de forma adicional deberá ser cuadrática en este caso y cumplir la condición de que su valor en los nodos del elemento sea cero, ya que hemos mantenido las funciones de forma estándares del elemento lineal y el valor de la función incógnita en los nodos como gdl. De esta forma, la nueva función de forma debe ser:

$$N_2^j = \alpha_0(1 - \xi^2) \quad (54)$$

La constante α_0 en principio puede ser arbitraria. Dependiendo de su elección obtendremos como gdl a_2 una u otra magnitud escalada correspondientemente. Debemos, por lo tanto imponer una condición adicional para definir completamente la nueva función de forma, que por ejemplo, puede ser que su valor en el punto $\xi = 0$ sea la unidad. De esta forma, se obtiene:

$$N_2^j = 1 - \xi^2 \quad (55)$$

Considerando esta condición adicional, el gdl añadido tiene un sentido físico claro: separación de la función en el punto $\xi = 0$ de la linealidad (ver Figura 26).

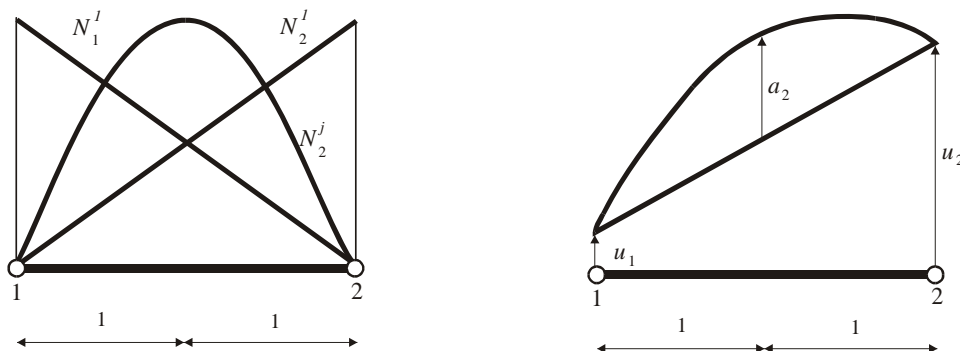


Figura 26.- Representación de funciones de forma e interpolación utilizando funciones de forma jerárquicas.

Si deseamos añadir un gdl adicional, debemos incorporar una nueva función de forma polinómica cúbica:

$$N_3^j(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 \quad (56)$$

Como en el caso anterior debemos exigir que sea nula en los nodos, y además podremos imponer dos condiciones adicionales. Por ejemplo, considerando que sea nula en el centro del elemento ($\xi = 0$) y tenga pendiente unitaria en dicho punto, se obtiene:

$$N_3^j(\xi) = \xi(1 - \xi^2) \quad (57)$$

Las funciones de forma jerárquicas no son únicas, ya que se deben considerar condiciones adicionales para su definición. Un conjunto de funciones de forma jerárquicas que se ha empleado usualmente es el definido por:

$$N_p^j(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{p!}(\xi^p - 1) & p \text{ par} \\ \frac{1}{p!}(\xi^p - \xi) & p \text{ impar} \end{cases} \quad p \geq 2 \quad (58)$$

En elasticidad, los coeficientes de la matriz de rigidez provienen de integrales de la forma:

$$k_{ij}^e = \int c_{ij} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx = \frac{2}{h} \int_{-1}^1 c_{ij} \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \quad (59)$$

siendo c_{ij} una constante si el problema es lineal y se ha considerado que el determinante de la transformación de coordenadas es igual a $2/h$, siendo h el tamaño del elemento en coordenadas reales. Si las funciones de forma jerárquicas se definen de forma que las integrales definidas por la ecuación (59) sean nulas para $i \neq j$, las ecuaciones correspondientes estarán desacopladas (la matriz de rigidez será diagonal). En este caso, si añadimos gdl mediante funciones de forma jerárquicas (con objeto de disminuir el error de discretización), el reanálisis del problema será más simple.

Los polinomios de Legendre, $P_p(\xi)$, tienen esta propiedad de ortogonalidad (en $-1 \leq \xi \leq 1$) y las funciones de forma jerárquicas se pueden definir en términos de integrales de dichos polinomios:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{p!} \frac{1}{2^p} \frac{d^p [(\xi^2 - 1)^p]}{d\xi^p} \quad (60)$$

$$N_p^j(\xi) = \int P_{p-1}(\xi) d\xi = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^{p-2} [(\xi^2 - 1)^{p-1}]}{d\xi^{p-2}} \quad (61)$$

con lo que se obtiene:

$$N_2^j = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \quad ; \quad N_3^j = \frac{1}{2}(\xi^3 - \xi) \dots \quad (62)$$

Este desacoplamiento de los gdl sólo es posible en problemas unidimensionales. En otros casos, las matrices no serán diagonales (con lo que no se desacoplan completamente los gdl) pero estarán mejor condicionadas para su resolución numérica.

Para problemas bidimensionales, la definición de las funciones de forma jerárquicas de elementos cuadriláteros sigue un planteamiento análogo al realizado con los elementos estándares lagrangianos. Es decir, las funciones de forma jerárquicas en cuadriláteros se forman multiplicando funciones de forma de los elementos jerárquicos

unidimensionales. Este procedimiento puede, evidentemente ser extrapolado al caso de elementos hexaédricos en el caso 3D. Por ejemplo, para el caso del elemento cuadrilátero mostrado en la Figura 27, tendríamos las siguientes funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= N_1^l(\xi)N_2^l(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= N_1^l(\xi)N_2^j(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(\eta^2-1) \\ N_3(\xi, \eta) &= N_2^j(\xi)N_2^j(\eta) = \frac{1}{4}(\xi^2-1)(\eta^2-1) \end{aligned} \quad (63)$$

Este método de construcción de funciones de forma permite tener mayores grados de interpolación en los laterales de elemento donde se desee. Esta ventaja es aprovechada en los procesos de refinamiento p -adaptativos en los que el modelo de elementos finitos es mejorado aumentando el grado polinómico en aquellos elementos donde sea necesario. Puesto que en estos refinamientos se obtienen elementos contiguos con diferentes grados de interpolación, la continuidad C^0 entre elementos se garantiza modificando el grado de la interpolación en el lado de conexión entre los elementos.

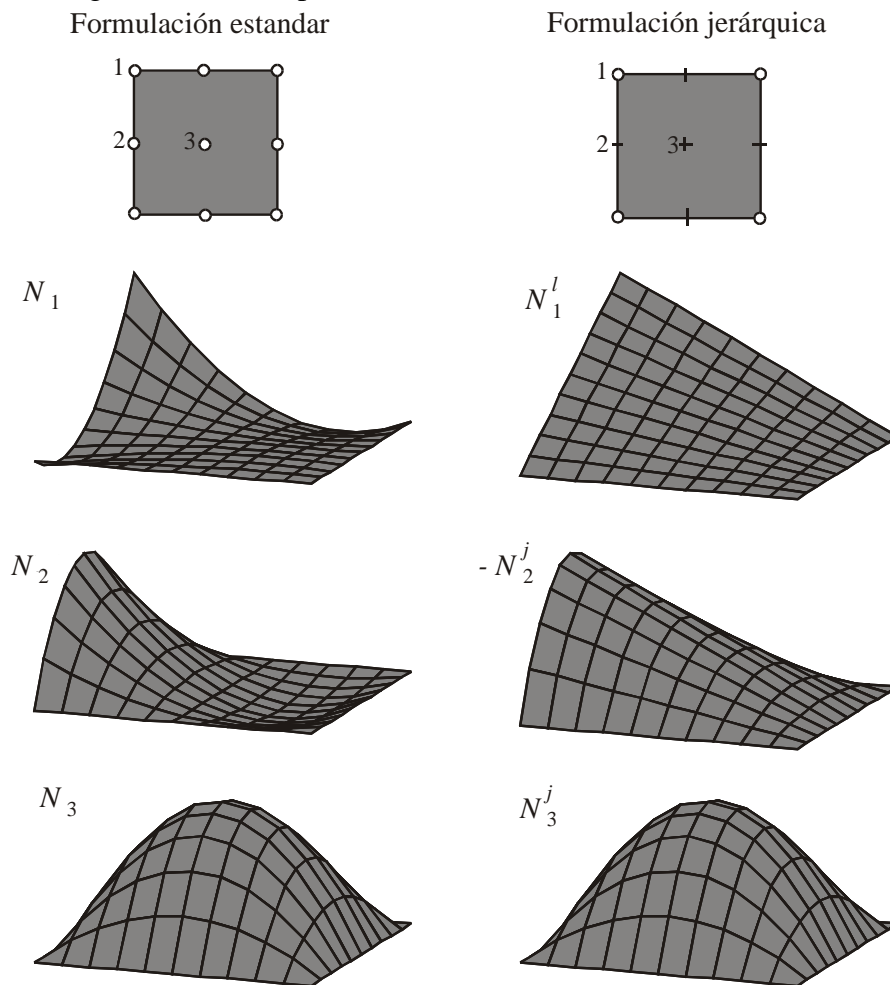


Figura 27.- Funciones de forma convencionales y jerárquicas para un elemento cuadrilátero.

Para el caso de elementos triangulares (o tetraédricos en el caso 3D) los conceptos de multiplicación de funciones de forma para obtener las funciones de forma de los elementos jerárquicos pueden ser utilizados expresando las funciones de forma en términos de coordenadas de área.

TEMA 5.-

**SOLUCIÓN
APROXIMADA
DEL M.E.F.**

ÍNDICE

| | |
|--|----------|
| 1.- INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2.- CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN | 2 |
| 2.1.- CONTINUIDAD DE DESPLAZAMIENTOS..... | 2 |
| 2.2.- EQUILIBRIO EN NODOS | 3 |
| 2.3.- EQUILIBRIO EN CONTORNOS ENTRE ELEMENTOS | 4 |
| 2.4.- CONDICIÓN DE CONTORNO EN DESPLAZAMIENTOS..... | 5 |
| 2.5.- TRACCIONES IMPUESTAS EN EL CONTORNO..... | 5 |
| 2.6.- EQUILIBRIO EN EL INTERIOR DE LOS ELEMENTOS | 6 |
| 3.- CLASIFICACIÓN DE ERRORES EN EL MEF | 8 |

1.- INTRODUCCIÓN

El Método de los Elementos Finitos (MEF) se ha convertido en una de las técnicas más potentes y más ampliamente utilizadas para encontrar soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales que rigen numerosos tipos de problemas ingenieriles y muy particularmente en el campo de la Ingeniería Mecánica.

A la hora de utilizar el MEF se ha de tener muy presente que la solución que proporciona el método es aproximada, por lo que difiere de la solución exacta. El usuario de los programas de elementos finitos debe ser consciente de este hecho. En este sentido, en este tema se persiguen los siguientes objetivos fundamentales.

- a) Presentar dónde se dan las diferencias entre la solución exacta y la que proporciona el MEF analizando las características de la solución.
- b) Mostrar el origen de los errores que producen la diferencia entre ambas soluciones, prestando especial atención al error de discretización

2.- CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN

En la solución exacta, de acuerdo con la teoría de la elasticidad, cualquier elemento diferencial del continuo está en equilibrio. Una solución aproximada de elementos finitos no se ajusta, en general, a este requisito. En esta sección se describirán las características del campo de desplazamientos obtenido así como qué condiciones de equilibrio se satisfacen en los nodos, a lo largo de los contornos entre elementos, y en el interior de cada elemento.

Para ilustrar gráficamente las explicaciones de esta sección se utilizará la solución obtenida mediante el MEF del problema mostrado en la siguiente figura, que corresponde al de una placa con agujero central en tensión plana sometida a tracción constante en sus extremos. Como se observa, las simetría del problema ha permitido utilizar un modelo 2D correspondiente a 1/4 del componente a analizar.

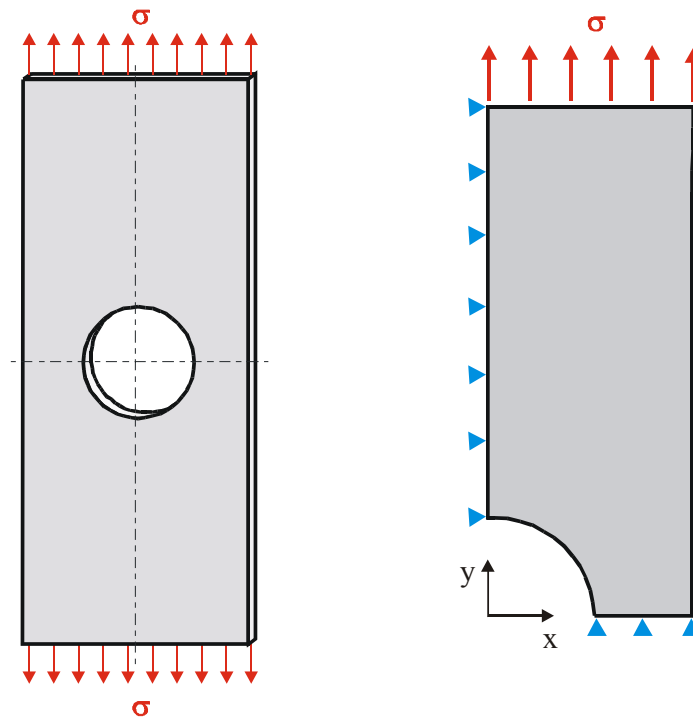


Figura 1.- Problema de ilustrativo y su correspondiente modelo a analizar mediante el MEF.

2.1.- Continuidad de desplazamientos

Los desplazamientos pueden o no ser continuos a lo largo de los contornos entre elementos. Esta continuidad depende de la interpolación de desplazamientos utilizada y se satisface para la mayor parte de los elementos finitos, y en concreto para los elementos de continuidad C^0 . La Figura 2 muestra el campo de desplazamientos horizontales u_x que se obtiene en el problema de la figura anterior mediante el MEF cuando se utilizan elementos triangulares lineales de continuidad C^0 , pudiéndose observar que se trata de un campo continuo.

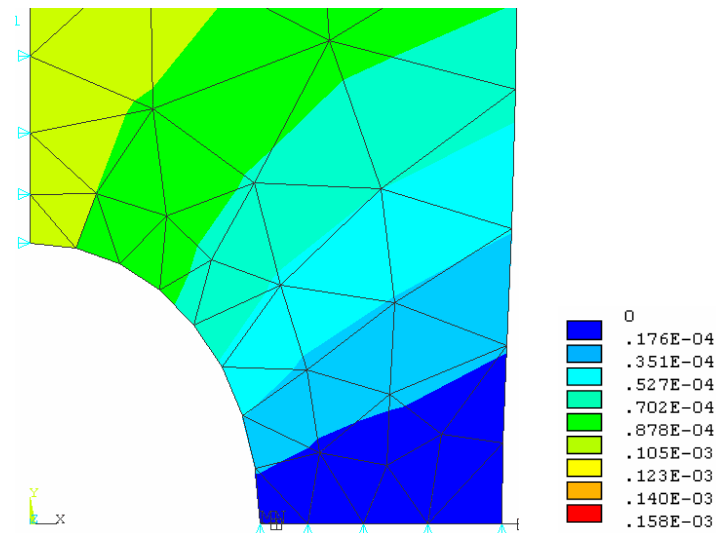


Figura 2.- Campo de desplazamientos u_y obtenido mediante el MEF.

En algunas ocasiones resulta complicado encontrar funciones de interpolación que garanticen de forma automática la continuidad de los desplazamientos en las fronteras de los elementos. Los elementos que no presentan continuidad de desplazamientos en la frontera son los llamados *elementos no conformes*. En ellos, a medida que el tamaño del elemento tiende a cero, dicha continuidad tiende a satisfacerse.

Este tipo de elementos se utiliza para mejorar el comportamiento de los elementos estándar. Así, por ejemplo, el elemento cuadrilátero lineal tiene un comportamiento poco preciso cuando se utiliza para modelar problemas de flexión. Una posible solución, que mejora notablemente la precisión de los resultados, consiste en utilizar elementos no conformes, que incluyen modos de interpolación cuadráticos.

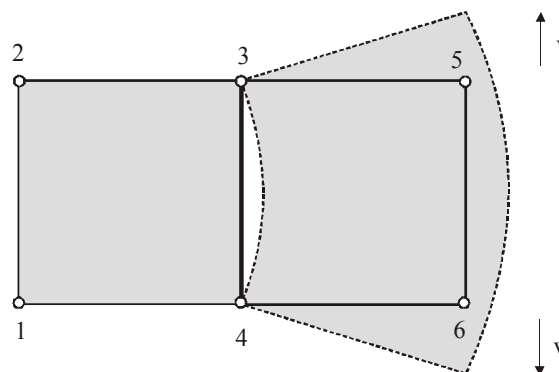


Figura 3.- Discontinuidad de desplazamientos en la frontera entre elementos con elementos no conformes

2.2.- Equilibrio en nodos

Se satisface el equilibrio de las fuerzas nodales y momentos. La ecuación estructural $\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$ representa el equilibrio nodal. De esta forma, el vector solución \mathbf{U} es tal que las fuerzas y momentos nodales tienen resultante nula en todos los nodos.

2.3.- Equilibrio en contornos entre elementos

El equilibrio no se satisface usualmente a lo largo de los contornos entre elementos. La figura siguiente presenta un ejemplo simple. Imagínese que los elementos son triángulos de tres nodos. Como la interpolación en desplazamientos es lineal, las tensiones (primeras derivadas de desplazamientos) son constantes dentro de cada elemento. El nodo 4 es el único que se desplaza. De esta forma mientras que la tensión en dirección x es nula en el elemento 1, la correspondiente tensión en el elementos 2, $\sigma_x^{(2)}$, es no nula y el elemento diferencial compartido marcado en la figura no está en equilibrio. Otros tipos de elementos finitos se comportan de forma similar.

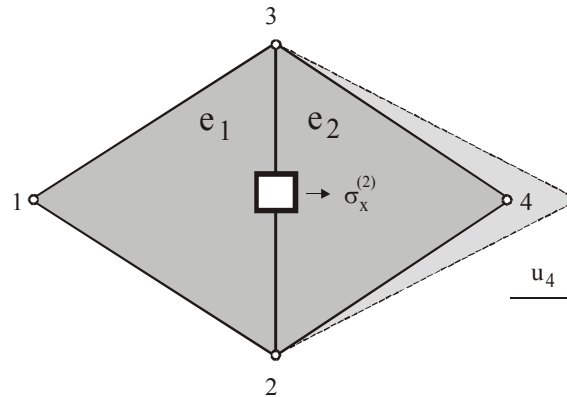


Figura 4.- Elemento diferencial en la frontera inter-elementos.

En la figura siguiente se muestra la distribución de tensión en dirección y que se obtiene mediante el MEF (σ_{yef}) con discretizaciones de elementos triangulares lineales y cuadráticos en el problema presentado en la Figura 1, observándose claramente las discontinuidades en las fronteras entre elementos.

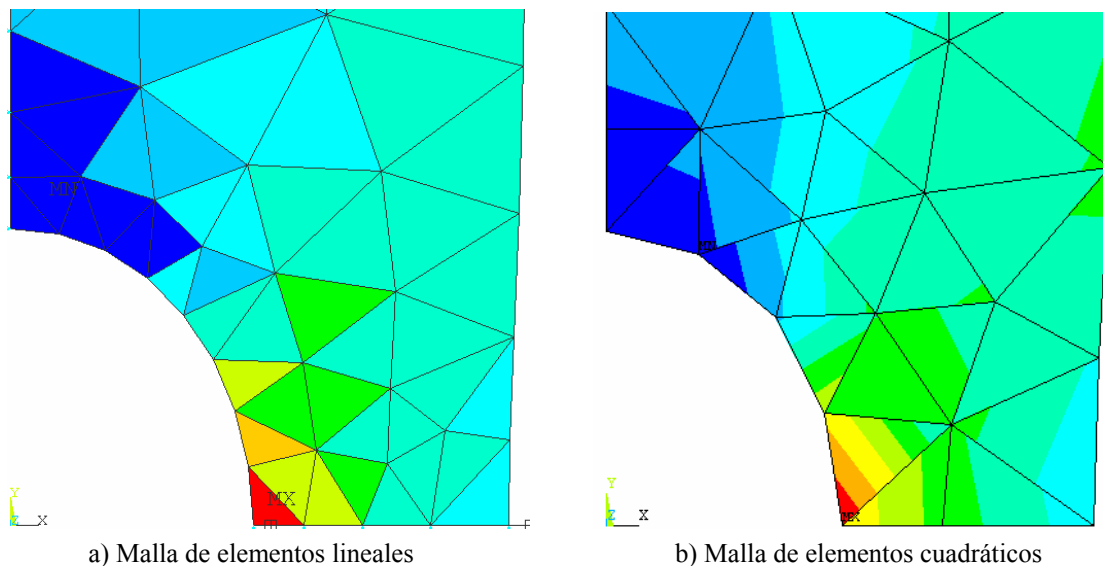


Figura 5.- Distribución discontinua de σ_{yef} .

Cuando se examinan los resultados en tensiones, no se puede esperar que las tensiones en elementos adyacentes sean iguales según el lado común, que las tensiones en los nodos sean iguales para los elementos que comparten el nodo, o, como se verá más

adelante, que las condiciones de contorno en tensiones se satisfagan exactamente. Para una malla definida correctamente estas discrepancias serán pequeñas y se harán menores a medida que se refina.

El salto de tensiones de la solución de EF que aparece entre elementos contiguos puede ser en ocasiones utilizado como un indicador del error de la solución, de manera que los mayores saltos de tensión indicarán las zonas donde se requiere un mayor grado de refinamiento de la malla.

2.4.- Condición de contorno en desplazamientos

En la formulación en desplazamientos del problema elástico se impone en los nodos el valor de los desplazamientos prescritos, por lo que los grados de libertad correspondientes dejan de ser incógnitas (en todo caso serán incógnitas las reacciones que aparecen en dichos nodos). Así pues, este tipo de condición de contorno se cumplirá de manera exacta en los nodos en los que se imponga.

2.5.- Tracciones impuestas en el contorno

Mientras que la solución del análisis de EF siempre cumple las condiciones de desplazamiento impuestas en nodos, en términos generales, las condiciones de contorno en tensiones no serán satisfechas de manera exacta.

En la figura siguiente se muestra la distribución de tensiones σ_{yef} que se obtiene en el ejemplo de la Figura 1. Pese a que aparentemente esta tensión es constante en los elementos situados en el contorno donde se aplica la tracción, cuando se representan los valores numéricos de la tensión obtenida en el mismo, estos no son constantes en todo el contorno y, de hecho, no coinciden con el correspondiente valor de tensión aplicada, tal y como se observa en la figura.

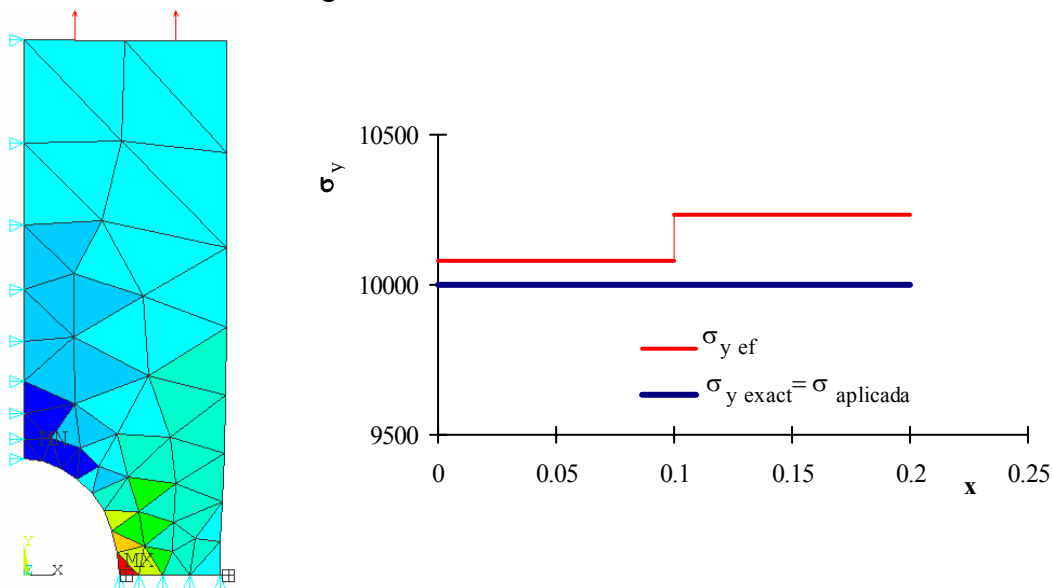


Figura 6.- Distribución de σ_{yef} y detalle de evolución de tensiones en el contorno superior.

Otro ejemplo de la falta de cumplimiento de las restricciones de tensión impuesta en el contorno lo constituye el ejemplo mostrado en la siguiente figura. En ella se muestra la evolución de las tensiones en dirección x que se obtienen a partir del análisis de EF. Puesto que en el contorno derecho de la figura la presión aplicada en dirección normal al mismo (dirección x) es nula, el valor de tensión σ_x que se debería obtener en dicho contorno debería ser nulo para garantizar el cumplimiento de la ecuación de equilibrio en el contorno. Sin embargo en la figura se muestra que la solución del análisis de EF no cumple esta condición de contorno.

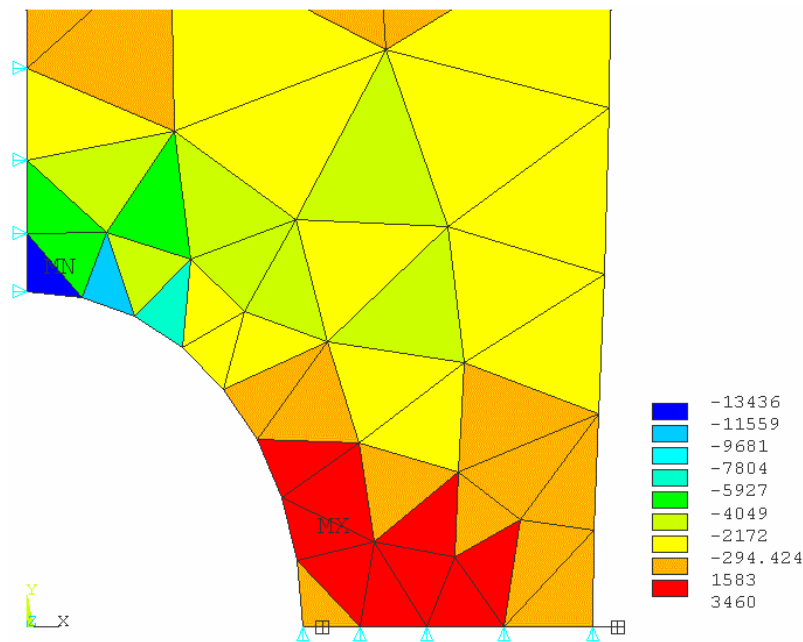


Figura 7.- Distribución de $\sigma_{x_{ef}}$. No se cumple la condición $\sigma_x = 0$ en el lateral derecho.

2.6.- Equilibrio en el interior de los elementos

Ya se ha comentado que la solución de EF no proporciona, en general, equilibrio en el contorno entre elementos ni en los contornos exteriores del dominio. De la misma forma, en general, tampoco se podrá garantizar el cumplimiento de la ecuación de equilibrio en el interior de los elementos, por lo que no habrá equilibrio entre la distribución de tensiones evaluada mediante el MEF y las fuerzas por unidad de volumen impuestas en el interior del dominio. Esto puede probarse fácilmente utilizando la ecuación de equilibrio.

Recuérdese, como ejemplo, que la ecuación de equilibrio en 2D viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

En el elemento triangular lineal las tensiones se representan mediante un valor constante en todo el elemento con lo que sus correspondiente derivadas con respecto a la direcciones x e y serán nulas. Así pues, en ausencia de fuerzas volumétricas ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$), la ecuación anterior se satisfará exactamente en el interior de este elemento. En cambio, la ecuación no se podrá verificar en este elemento si las fuerzas volumétricas no son nulas.

En el caso general no será posible garantizar el cumplimiento de la ecuación de equilibrio interno en el interior de los elementos.

3.- CLASIFICACIÓN DE ERRORES EN EL MEF

El método de los elementos finitos es un método numérico aproximado de análisis, con lo que los resultados obtenidos no serán exactos.

El error entre la solución exacta del problema y la obtenida mediante el MEF está influenciado por un conjunto de errores, que se pueden clasificar como:

- **Errores de modelado**, que aparecen debido a la diferencia que existe entre el sistema físico y su modelo matemático. En general se realizan hipótesis simplificativas para abordar el problema que introducen diferencias entre ambos sistemas en lo que respecta a los valores de las propiedades físicas, a la definición de las cargas y a la geometría (normalmente las fronteras curvas no pueden ser representadas exactamente). Se deben incluir en este apartado los errores introducidos por el propio analista a la hora de generar el modelo, sobre todo en lo que respecta a definición de las condiciones de contorno. Con relativa frecuencia se generan modelos donde, por ejemplo, los apoyos del componente están mal definidos o la representación de las cargas aplicadas no es realista.
- **Errores de redondeo**, causados por la utilización de un número finito de dígitos en la representación de números reales.
- **Errores de manipulación**, que son los errores de redondeo introducidos por un algoritmo. Por ejemplo, en la resolución del sistema de ecuaciones se realizan operaciones tales como $K_{22} - (K_{21}/K_{11})K_{12}$, con \mathbf{K} la matriz de coeficientes. Las divisiones y multiplicaciones tienen asociado sus errores de redondeo y la resta puede reducir significativamente su precisión si K_{22} y $(K_{21}/K_{11})K_{12}$ son similares.
- **Errores de integración**, provocados por el método numérico aproximado para realizar las integraciones requeridas por el MEF
- **Errores de discretización**, causado por la representación de los infinitos *g.d.l.* de un continuo mediante un número finito (discreto) de *g.d.l.*

En los programas comerciales de elementos finitos la utilización de la doble precisión y de algoritmos de cálculo apropiados hace que la importancia de los errores de redondeo y manipulación sobre el resultado final suele ser despreciable.

Como se vio en el tema anterior, una adecuada integración numérica hará que se mantenga la velocidad de convergencia del error con el refinamiento de la malla.

Normalmente, a medida que se refina la malla el efecto de los errores de modelado (salvo, claro está, los debidos a una incorrecta definición del modelo) se reduce tanto que la fuente más importante de error en los resultados del análisis de elementos finitos corresponde al error de discretización. En este sentido, este tema estará centrado fundamentalmente en el estudio del error de discretización de la solución. Pese a ello, se ha de indicar que una mala discretización puede originar problemas numéricos asociados a otros tipos de errores. Por ejemplo, si se conectan dos elementos con rigideces muy diferentes, en el ensamblado se perderá precisión al sumarse los

correspondientes términos de la matriz de rigidez (esto puede ocurrir al conectar elementos de tamaños muy dispares).

Los errores de discretización se pueden clasificar a su vez en 2 categorías diferentes: *errores de discretización con efecto local* y *errores de polución*.

Los aquí llamados errores de discretización con efecto local son los errores de discretización que aparecen en un elemento debido al tamaño finito de ese mismo elemento.

Por otro lado los errores de polución son los errores que aparecen en los elementos debidos a una deficiente discretización de otras partes de la malla. Por ejemplo, si en el componente analizado existe una singularidad (p.e. una grieta) y en sus inmediaciones no se refina la malla adecuadamente, los errores generados en los alrededores de la singularidad contaminarán los resultados obtenidos en el resto de elementos. Se ha comprobado sin embargo que este tipo de errores desaparece si se sigue un procedimiento adaptativo para analizar el problema.

TEMA 6.-

**ERROR DE
DISCRETIZACIÓN Y
TÉCNICAS
ADAPTATIVAS**

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| 1.- INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2.- VELOCIDAD DE CONVERGENCIA DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN..... | 2 |
| 2.1.- SUPERCONVERGENCIA | 3 |
| 3.- CUANTIFICACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN..... | 5 |
| 4.- ESTIMACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN | 8 |
| 5.- RECONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE TENSIONES | 9 |
| 5.1.- PROMEDIADO DIRECTO EN NODOS..... | 9 |
| 5.2.- LA TÉCNICA SPR..... | 10 |
| 6.- TÉCNICAS ADAPTATIVAS | 13 |
| 6.1.- PROCEDIMIENTOS <i>H</i> -ADAPTATIVOS..... | 14 |
| 6.2.- PROCEDIMIENTOS <i>P</i> -ADAPTATIVOS | 16 |
| 6.3.- PROCEDIMIENTOS <i>HP</i> -ADAPTATIVOS..... | 16 |
| 6.4.- PROCEDIMIENTOS <i>R</i> -ADAPTATIVOS | 17 |
| 7.- BIBLIOGRAFÍA..... | 19 |

1.- INTRODUCCIÓN

Como ya se comentó, el Método de los Elementos Finitos (MEF) se ha convertido en una de las técnicas más potentes y más ampliamente utilizadas para encontrar soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales que rigen numerosos tipos de problemas ingenieriles y muy particularmente en el campo de la Ingeniería Mecánica.

Una vez que se es consciente de que la solución que proporciona el método es aproximada resulta necesario exponer técnicas que permitan evaluar y disminuir el error de los resultados de este tipo de análisis. En este sentido, en este tema se persiguen los siguientes objetivos fundamentales.

- a) Plantear técnicas que permitan cuantificar el error de discretización
- b) Exponer las técnicas que permiten la definición de modelos de elementos finitos que proporcionen una solución con la precisión requerida por el usuario

2.- VELOCIDAD DE CONVERGENCIA DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Para una discretización dada, se puede considerar que la solución real del problema, dentro de un elemento, se puede desarrollar en serie de Taylor. Así, por ejemplo, la solución exacta en un punto de coordenadas (x,y) de un elemento bidimensional se podrá escribir como

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots \quad (1)$$

Si dentro de un elemento de tamaño h , se utiliza una expansión polinómica local de grado p , como $(x - x_i)$ e $(y - y_i)$ son del orden de magnitud de h , el error será del orden¹ $O(h^{p+1})$. De esta forma, en el caso de elasticidad, si se utilizan elementos lineales el error en desplazamientos será del orden $O(h^2)$, reduciendo por lo tanto el error a una cuarta parte si el tamaño del elemento se reduce a la mitad.

Mediante argumentos similares, las derivadas m -ésimas de las funciones en las que se formula el problema, tendrán convergencia con un error de orden $O(h^{p+1-m})$. Por ejemplo, en elasticidad, las tensiones (y también las deformaciones), son derivadas primeras de los desplazamientos, por lo que $m = 1$. Así pues, si utilizamos elementos lineales el error en estas magnitudes será del orden $O(h)$. La energía de deformación (que se evalúa como función de tensiones al cuadrado) exhibirá un error de orden $O(h^{2(p+1-m)}) = O(h^{2(p+1-1)}) = O(h^{2p})$. La tabla siguiente resume los ordenes de error de las principales magnitudes en el problema elástico.

Tabla 1.- Orden del error de diferentes magnitudes en el problema elástico

| Magnitud | Orden del error | $p=1$ | $p=2$ |
|--|-----------------|----------|----------|
| Desplazamientos \mathbf{u}_{ef} | $O(h^{p+1})$ | $O(h^2)$ | $O(h^3)$ |
| Deformaciones y Tensiones $\boldsymbol{\varepsilon}_{ef} \boldsymbol{\sigma}_{ef}$ | $O(h^p)$ | $O(h)$ | $O(h^2)$ |
| Energía de deformación Π_{ef} | $O(h^{2p})$ | $O(h^2)$ | $O(h^4)$ |
| Norma energética $\ \mathbf{u}_{ef}\ $ | $O(h^p)$ | $O(h)$ | $O(h^2)$ |

Estos razonamientos, que no constituyen un análisis riguroso del error de discretización, son válidos siempre y cuando no existan singularidades en el problema considerado. Por singularidades se entiende en el caso de la elasticidad, puntos en los que el resultado en tensiones tiende a infinito, invalidando los argumentos basados en desarrollo en series de Taylor de la solución. Un ejemplo típico de esta situación es el caso de grietas, en cuyos extremos, teóricamente, las tensiones que aparecen son infinitas (planteamiento elástico lineal).

¹ Que la solución tenga un error de orden $O(h^{p+1})$ indica que el error, e , evoluciona según una expresión del tipo $e = C \cdot h^{p+1}$, donde C es un parámetro constante desconocido para cada problema.

2.1.- Superconvergencia

Las velocidades de convergencia teóricas analizadas anteriormente están basadas únicamente en la teoría de aproximación mediante polinomios. Se puede comprobar que los resultados expuestos son los que se obtendrían en la mayoría de puntos en un elemento. Sin embargo existen ciertos puntos dentro de los elementos donde la velocidad de convergencia del error supera estos resultados. Estos puntos son los llamados *puntos de superconvergencia*.

La existencia de este tipo de puntos especiales no debe sorprender. Recuérdese que, tal y como ha sido planteado en temas anteriores, en la solución mediante el MEF intervienen dos componentes: una aproximación polinómica a la solución exacta y un criterio de optimización (minimización de la energía potencial total para el caso del problema elástico estático). Las velocidades de convergencia teóricas analizadas tienen solamente en cuenta al primero de estos dos componentes, ignorando la aportación del criterio de optimización. Por lo tanto, se podría esperar que la solución de EF convergiese *como mínimo* a estas velocidades en cualquier punto. Parece razonable esperar que el criterio de optimización pueda incluso mejorar estos resultados, como de hecho ocurre.

Se puede demostrar que:

- a) los *puntos de superconvergencia de los desplazamientos* son los propios nodos del elemento, para cualquier grado polinómico de la interpolación.
- b) los *puntos de superconvergencia de las tensiones* (y por tanto de las deformaciones) corresponden o están próximos a los puntos de cuadratura de Gauss asociados al grado polinómico utilizado en la interpolación de desplazamientos.

En estos puntos la velocidad de convergencia de estas funciones es un orden superior a la que se había predicho inicialmente.

El ejemplo de la figura siguiente muestra los valores de tensión que se obtienen en un modelo formado por un único elemento unidimensional para distintas aproximaciones polinómicas y la localización de los puntos de superconvergencia (puntos de la regla de cuadratura de Gauss).

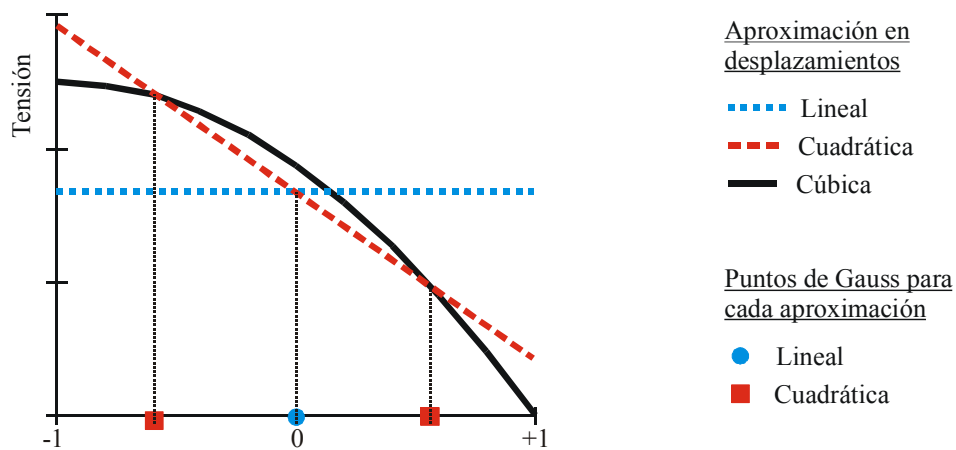


Figura 1.- Puntos de superconvergencia de tensiones para distintas aproximaciones polinómicas en un elemento unidimensional

En la figura anterior se observa con claridad la razón por la que en los puntos de superconvergencia de tensiones la velocidad de convergencia corresponde a la que se obtendría con una aproximación polinómica en desplazamientos de un grado superior. En este caso, en el que no hay influencias de otros elementos por ser el único elemento del modelo, se puede observar que el valor de tensión que se obtiene en los puntos de Gauss corresponde exactamente al valor de tensión que se obtendría si se utilizase una aproximación polinómica en desplazamientos de un grado superior.

3.- CUANTIFICACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Para cuantificar el error de discretización se ha de usar una magnitud que resulte útil en lo que respecta a la definición de procedimientos que permitan la reducción de dicho error. La medida del error de discretización definida como la diferencia entre el campo de desplazamientos exacto y el campo de desplazamiento calculado mediante el MEF no es práctica, ya que vendría dada, por ejemplo, como un vector de errores evaluado en cada uno de los grados de libertad de la malla, siendo difícil su interpretación, y siendo además de poca utilidad práctica. En general se busca cuantificar dicho error mediante una norma, que permita definirlo en base a un escalar. Una magnitud habitualmente utilizada es la *norma energética*. La norma energética de las soluciones exacta y de elementos finitos se definen como:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_{ex}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ex} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ex} dV} = \sqrt{2\Pi_{ex}} \\ \|\mathbf{u}_{ef}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ef} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ef} dV} = \sqrt{2\Pi_{ef}}\end{aligned}\quad (2)$$

Donde los subíndices *ex* y *ef* indican soluciones exacta y de elementos finitos respectivamente. Obsérvese que la norma energética de la solución físicamente se corresponde con la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación, Π . Para cuantificar el error de discretización se considera habitualmente la norma energética del error, definida como:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV} \quad (3)$$

que es la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación del error. Se puede demostrar que esta magnitud está relacionada con la norma energética de la solución exacta y la de elementos finitos mediante la expresión:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} \quad (4)$$

Si se conoce la solución exacta del problema el uso de la ecuación (4) permite la evaluación del error de discretización tanto a nivel global, considerando como dominio de integración el volumen total del componente analizado, como a nivel de elemento, considerando como dominio de integración el de cada uno de los elementos. La relación entre el valor global, $\|\mathbf{e}_{ex}^{global}\|$, y el valor en cada uno de los N_e elementos, $\|\mathbf{e}_{ex}^e\|$, vendrá dada por:

$$\|\mathbf{e}_{ex}^{global}\|^2 = \sum_{e=1}^{N_e} \|\mathbf{e}_{ex}^e\|^2 \quad (5)$$

A partir de la definición del error de discretización absoluto, se puede definir el error relativo en términos porcentuales como:

$$\eta_{ex} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} \cdot 100 \quad (6)$$

Considerando que no existen singularidades, y considerando el problema elástico, tal y como se vio en el apartado anterior, el error de discretización en norma energética será una función del tamaño de elemento, h , elevado al grado polinómico completo de la interpolación de desplazamientos, p . Por lo tanto, en el rango asintótico de la solución, es decir, para modelos suficientemente refinados, se podrá escribir:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^p \quad (7)$$

donde C_0 es un parámetro constante positivo que depende del problema estudiado (y no del tamaño de los elementos). Esta ecuación, que relaciona el error con el tamaño de elementos y orden del polinomio completo incluido en las funciones de forma, será de gran utilidad para relacionar, en cuanto a error, discretizaciones diferentes de un mismo problema.

En el caso en el que el problema presente una singularidad, se puede demostrar que la expresión anterior se transforma en la siguiente:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^c \quad c = \min(p, \lambda) \quad (8)$$

Donde λ es un parámetro que caracteriza la intensidad de la singularidad. En la figura siguiente se muestran los valores de este parámetro para el Modo I en diferentes geometrías con singularidad:

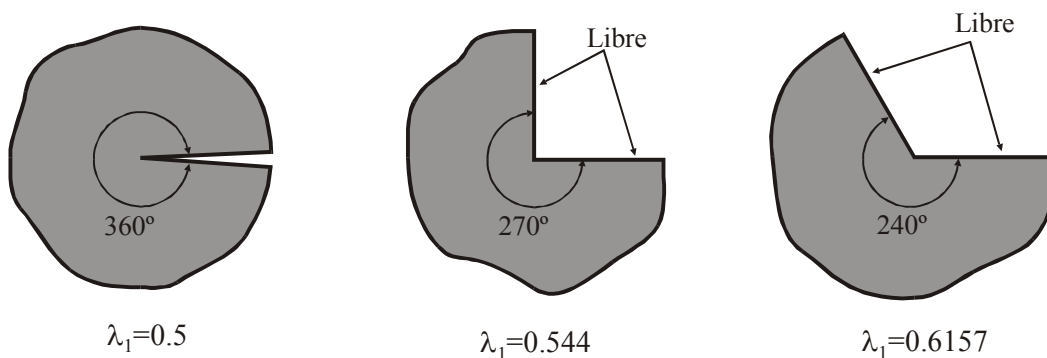


Figura 2.- Valores de λ para el modo I en diferentes geometrías singulares.

Puesto que, en el caso general, no todos los elementos de la malla serán del mismo tamaño, resulta interesante disponer de una expresión que relacione el error en norma energética, $\|\mathbf{e}_{ex}\|$ con el número de grados de libertad, N , de la discretización. Se puede considerar que en problemas 1-D el valor de N aumenta linealmente conforme disminuye el tamaño de los elementos, de manera cuadrática en el caso 2-D y de manera cúbica en el caso 3-D. Por lo tanto, para refinamientos uniformes, el error de discretización exacto en norma energética, $\|\mathbf{e}_{ex}\|$ se podrá expresar como:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx CN^{\frac{-1}{d}c} \quad c = \min(p, \lambda) \quad (9)$$

donde d representa el número de dimensiones del problema y C , al igual que C_0 , es un parámetro constante positivo que depende del problema estudiado (y no del tamaño de los elementos).

En el caso de refinamientos adaptativos, el propio proceso adaptativo neutraliza el efecto de la singularidad, y la expresión anterior se podrá describir como:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx CN^{\frac{-1}{d}p} \quad (10)$$

Estas relaciones podrán establecerse siempre y cuando la constante C no varíe de una discretización a la otra. Esta condición se cumple básicamente cuando se realizan

refinamientos uniformes, en los que los elementos de la malla refinada mantienen una proporción constante con los de la otra malla, o

refinamientos adaptativos, en los que la malla se refina en función del error evaluado en cada elemento, mediante la definición de mallados uniformes dentro de cada uno de los elementos de la malla (*refinamiento localmente uniforme*).

4.- ESTIMACIÓN DEL ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Evidentemente el cálculo de las expresiones anteriores es normalmente imposible ya que sería necesario conocer la solución exacta del problema. Sin embargo estas expresiones son la base del llamado estimador de error de Zienkiewicz y Zhu, que es uno de los más utilizados en la práctica para estimar el valor del error de discretización. El método propuesto por estos autores consiste en, partiendo de la solución de E.F., σ_{ef} , determinar una solución σ^* que sea una mejor aproximación a la solución exacta que la de E.F., y calcular la diferencia entre ellas como estimación del error exacto. Por tanto, a partir de la ecuación (4), la expresión propuesta por estos autores para obtener la estimación del error en norma energética es la siguiente:

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \sqrt{\int (\sigma^* - \sigma_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\sigma^* - \sigma_{ef}) dV} \quad (11)$$

Una vez evaluada la estimación del error absoluto en norma energética mediante la expresión anterior, se podrá también obtener una estimación del error relativo en norma energética en términos porcentuales utilizando la siguiente expresión:

$$\eta_{es} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\sqrt{\|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{es}\|^2}} \cdot 100 \quad (12)$$

En la ecuación (12) el campo σ^* es el llamado *campo de tensiones reconstruido* (del término inglés *recovered*) aunque suele ser llamado con más frecuencia *campo de tensiones alisadas*. En el siguiente apartado se estudiarán las técnicas más comunes de obtención de este campo.

La calidad del procedimiento de estimación del error de discretización se puede cuantificar mediante la llamada *efectividad* (θ) del estimador de error, definida según la expresión:

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}_{ex}\|} \quad (13)$$

Evidentemente para la validar un estimador de error mediante este parámetro es necesario disponer de problemas con solución exacta con los que comprobar que el estimador proporciona los resultados adecuados. Un estimador de error es fiable si proporciona valores de efectividad cercanos a la unidad (su valor ideal). En general se suele considerar que el estimador es fiable si se obtienen valores de efectividad entre 0.8 y 1.2. Un estimador de error es llamado *asintóticamente exacto* si proporciona valores de efectividad que tienden a la unidad conforme se refina la malla.

5.- RECONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE TENSIONES

En la definición del campo σ^* dentro de cada uno de los elementos de la malla se suele utilizar la siguiente expresión:

$$\sigma^* = \mathbf{N} \underline{\sigma}^* \quad (14)$$

Donde \mathbf{N} son las funciones de forma utilizadas en la interpolación de desplazamientos y $\underline{\sigma}^*$ son los valores del campo σ^* evaluados en los nodos del elemento. Así pues, la precisión del estimador de error de discretización en norma energética será función de la precisión con la que se calculen los valores nodales $\underline{\sigma}^*$.

5.1.- Promediado directo en nodos

Los códigos de elementos finitos disponen de subrutinas de alisado de la solución a través de las cuales se obtiene un *campo de tensiones continuo* o *alisado* (en vez del discontinuo obtenido del análisis de elementos finitos. Estos procedimientos de alisado permiten obtener representaciones del campo de tensiones más realistas que las de los resultados directamente obtenidos del análisis de Elementos Finitos.

La técnica más comúnmente utilizada para obtener los campos continuos de tensiones es la de *promediado directo en nodos*. La técnica consiste en asignar a cada nodo de la malla el valor promedio de las tensiones evaluadas en dicho nodo como correspondiente a cada uno de los elementos a los que está conectado. Se utiliza para ello la siguiente expresión:

$$\underline{\sigma}_j^* = \frac{\sum_{e=1}^{M_j} \sigma_{ef(j)}^e}{M_j} \quad (15)$$

En la expresión anterior

$\underline{\sigma}_j^*$ es la tensión alisada en el nodo j

M_j es el número de elementos que contienen al nodo j

$\sigma_{ef(j)}^e$ es la tensión evaluada mediante EF en el nodo j como perteneciente al elemento e

A modo de ejemplo, en la siguiente figura se muestra el campo de tensiones obtenido al aplicar la técnica de promediado directo en nodos al campo de tensiones representado en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..a)**. Se muestra también en la figura un detalle de la evolución de las tensiones en el contorno inferior del componente donde se comparan las tensiones obtenidas mediante el MEF y las correspondientes tensiones alisadas.

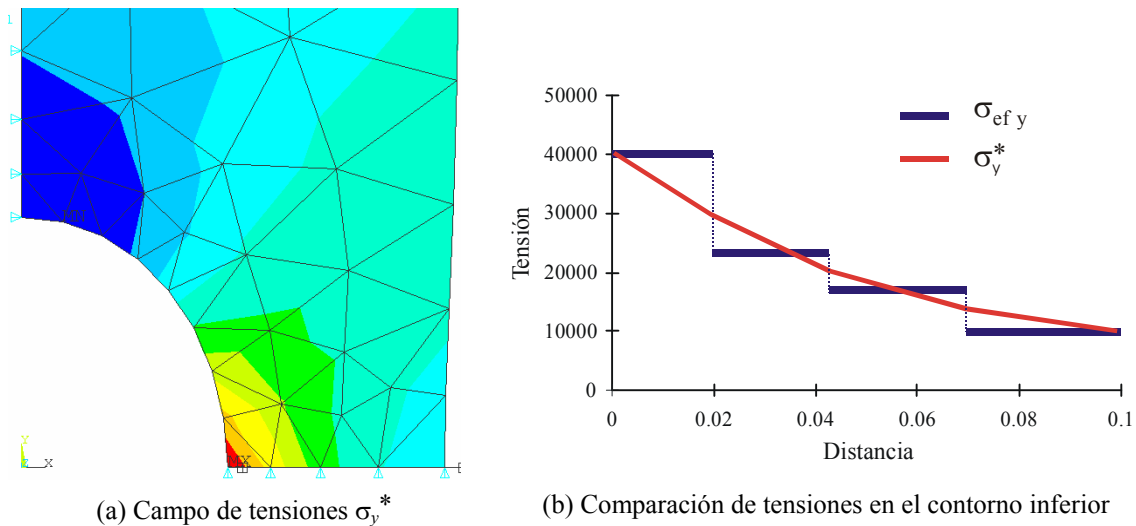


Figura 3.- Evolución de σ_y^* . Malla de elementos triangulares lineales.

La precisión de los resultados que se obtienen con esta técnica será superior en el interior del dominio ya que es ahí donde existe un mayor número de elementos rodeando a cada uno de los nodos, con lo que existe más información por nodo para evaluar la tensión alisada que en el contorno. Como casos extremos obsérvese en la Figura 3(b) que, en los nodos situados en los extremos del contorno inferior, la tensión alisada toma el mismo valor que la obtenida mediante el MEF. Esto es debido a que estos nodos están asociados a un único elemento (véase Figura 3(a)) por lo que en ellos el alisado mediante promediado directo en nodos no proporciona ningún tipo de mejora.

La utilización de este método con elementos lineales proporciona un estimador asintóticamente exacto (el valor de efectividad, θ , tiende a la unidad con el refinamiento de la malla), no ocurriendo lo mismo cuando se utiliza con elementos de mayor grado.

5.2.- La Técnica SPR

En 1992 Zienkiewicz y Zhu demostraron que para que su estimador, ecuación (12), sea asintóticamente exacto es necesario que el campo σ^* sea superconvergente. Basándose en este hecho desarrollaron una técnica que permite la evaluación de un campo σ^* superconvergente ya que su obtención está basada en resultados superconvergentes de las tensiones evaluadas mediante el MEF.

La técnica propuesta por estos autores es la denominada *Técnica SPR (Superconvergent Patch Recovery)*. Estos autores consideran que, en cada nodo, cada una de las componentes de tensión $\underline{\sigma}^*$ se obtienen a partir de un polinomio σ_{*p} de grado completo p igual al de las funciones de forma \mathbf{N} utilizadas en la interpolación de los desplazamientos, definido en un *patch* formado por los elementos que rodean al nodo considerado.

La figura siguiente muestra un ejemplo de patch formado por elementos lineales y otro formado por elementos cuadráticos:

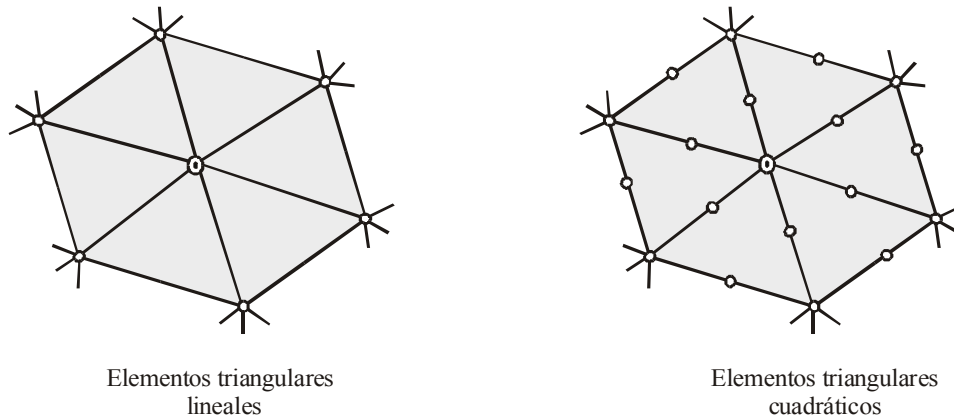


Figura 4.- Patches de elementos triangulares lineales y cuadráticos.

● nodo de ensamblaje del patch. ○ nodos que definen el patch

Para cada una de las componentes de tensión el polinomio, σ_{*p} , tiene la siguiente expresión

$$\sigma_{*p} = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \dots = \mathbf{p} \mathbf{a} \quad (16)$$

donde \mathbf{p} contiene los términos del polinomio completo de grado p . Por ejemplo, para el caso bi-dimensional cuadrático se tendrá que:

$$\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (17)$$

y donde \mathbf{a} es el vector de parámetros desconocidos, que para este caso será:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}^T \quad (18)$$

Para calcular los valores desconocidos \mathbf{a} se plantea un ajuste por mínimos cuadrados del polinomio σ_{*p} a los valores de tensión superconvergente que se obtienen en los elementos del patch. Una vez obtenidos los valores del vector \mathbf{a} , el polinomio σ_{*p} queda perfectamente definido. Particularizando este polinomio en el nodo vértice de ensamblado del patch se obtienen los valores nodales de tensión alisada $\underline{\sigma}^*$. De la misma forma se procede con los nodos de mitad de lado situados alrededor del nodo vértice de ensamblado del patch en el caso de elementos cuadráticos. Puesto que en los nodos de mitad de lado la tensión se evalúa dos veces (una con cada uno de los nodos vértice del lado) se promedian los dos valores de tensión.

En las imágenes de la figura siguiente se muestra gráficamente el proceso de alisado mediante la técnica SPR particularizado para el caso de elementos triangulares lineales.

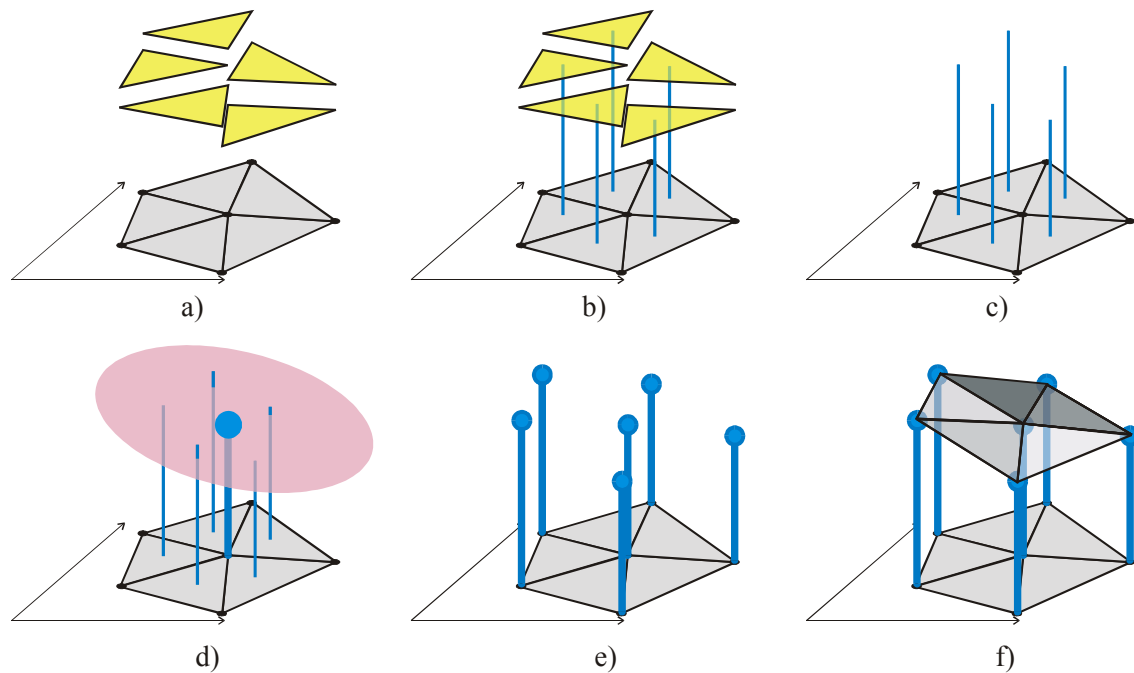


Figura 5.- Procedimiento de alisado mediante la Técnica SPR en mallas de elementos triangulares lineales. a) Solución discontinua de elementos finitos. b) Identificación de puntos de superconvergencia. c) Selección de valores de tensión en puntos de superconvergencia. d) Ajuste de una superficie polinómica a los valores de tensión en puntos de Gauss por mínimos cuadrados y particularización en nodo de ensamblado. e) Obtención de tensiones mediante técnica SPR para el resto de nodos. f) Generación del campo de tensiones continuo a partir de los valores nodales.

Por tratarse de un procedimiento de cálculo local en el que únicamente intervienen los elementos situados alrededor de cada nodo vértice su coste computacional es muy reducido. Por ejemplo, para el caso de elementos triangulares cuadráticos tan solo exige la inversión de una matriz 6×6 para evaluar las 6 incógnitas asociadas a cada una de las componentes del vector de tensiones para cada patch.

El procedimiento proporciona valores de tensión superconvergentes en los nodos del interior del dominio. Sin embargo, en los nodos del contorno no se obtienen tensiones superconvergentes porque los patches están formados por un reducido número de elementos, con lo que la estimación del error de discretización resulta de peor calidad en el contorno.

6.- TÉCNICAS ADAPTATIVAS

Las técnicas adaptativas son procedimientos que permiten mejorar el modelo de elementos finitos para disminuir el error de discretización, adaptándose a la solución del problema tras analizar las zonas donde el modelo proporciona mayor error. Este tipo de técnicas requieren tres ingredientes básicos. Los dos primeros ingredientes de que se debe disponer son:

- **Estimador del error de discretización a nivel de elemento.** Se puede considerar que el estimador de error de Zienkiewicz y Zhu expuesto en la *Sección 4.-* es el más utilizado en la práctica.
- **Criterio de distribución del error** que proporcione la forma en que se ha de distribuir el error en los elementos para que en la nueva malla se consiga el error deseado por el usuario. En la actualidad, es usual utilizar como criterio la distribución uniforme del error en los elementos de la nueva malla (se busca que todos los elementos de la nueva malla tengan el mismo error absoluto en norma energética). Se ha comprobado que este criterio minimiza el número de grados de libertad necesario para conseguir el error especificado por el usuario.

Mediante estos dos ingredientes es posible determinar, elemento a elemento, la relación existente entre los elementos de la nueva malla y los de la malla actual que permita obtener el error deseado por el usuario. La evaluación de dicha relación se basa en el tercer ingrediente requerido por las técnicas de adaptación de la malla: la **ley de convergencia del error** que determina el nivel de reducción del error que se produce cuando se disminuye el tamaño del elemento o se aumenta el grado de las funciones de interpolación. En este sentido se utilizará la expresión que define la ley de convergencia del error de discretización en norma energética vista anteriormente y que se vuelve a mostrar aquí por conveniencia:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^p \quad (8)$$

En el proceso de generación de una nueva malla en un análisis adaptativo se tendrá en cuenta la ecuación que, desarrollada a partir de la ecuación anterior, relaciona los valores de $\|\mathbf{e}\|$, h y p de un elemento de la malla actual y de los que se generarían a partir de él en la nueva malla:

$$\frac{\|\mathbf{e}_{ex}^{e'}\|_{nueva}}{\|\mathbf{e}_{ex}^e\|_{actual}} \approx \frac{h_{nueva}^{p_{nueva}}}{h_{actual}^{p_{actual}}} \quad (19)$$

En la expresión anterior el superíndice e indica el número de elemento de la malla actual mientras que e' hace referencia a elementos de la nueva malla creados a partir del elemento e de la malla actual.

Así pues, en el proceso de generación de la nueva malla, los términos de la ecuación anterior, que proporciona información sobre el tamaño que han de tener los nuevos elementos, se evalúan de la siguiente forma:

$\|e_{ex}^e\|_{actual}$ se puede determinar su valor aproximado mediante el estimador de error de discretización

$\|e_{ex}^{e'}\|_{nueva}$ la evaluación de este término se realiza mediante el criterio de distribución del error que definirá el error deseado en los elementos e' de la nueva malla creados a partir del elemento e de la malla actual.

h_{actual} es el tamaño (dato) del elemento e de la malla actual

p_{actual} es el grado de la interpolación (dato) en el elemento de la malla actual

h_{nueva} es el tamaño (incógnita) de los elementos e' de la malla nueva generados a partir del elemento e ,

p_{nueva} es el grado de la interpolación (incógnita) en los elementos e' de la nueva malla

En base a esta expresión se pueden definir diversas estrategias de adaptación de la malla para disminuir el error de discretización en norma energética:

- Procedimientos ***h*-adaptativos**
- Procedimientos ***p*-adaptativos**
- Procedimientos ***hp*-adaptativos**

6.1.- Procedimientos ***h*-adaptativos**

Los procedimientos ***h*-adaptativos** son aquellos en los que se varía el tamaño de los elementos manteniendo el grado de la interpolación ($p_{nueva} = p_{actual}$)

A modo de ejemplo se mostrará un mallado adaptativo realizado para analizar el siguiente problema, correspondiente a un soporte que ha desarrollado sendas grietas en cada uno de los tramos verticales. Teniendo en cuenta las simetrías del problema se ha considerado únicamente el modelo mostrado en la parte derecha de la imagen.

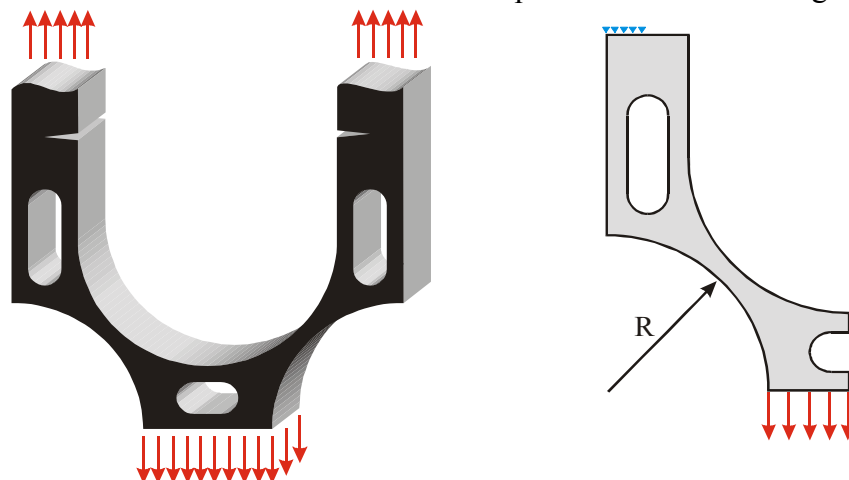
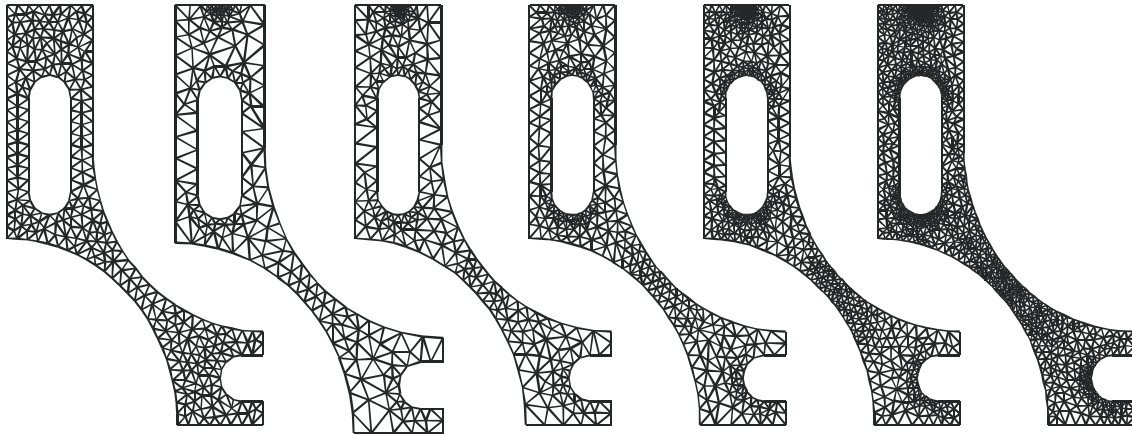


Figura 6.- Soporte con grietas sometido a cargas y modelo utilizado en el análisis mediante el MEF

La secuencia de mallas obtenida mediante el procedimiento automático ***h*-adaptativo** se muestra en la siguiente figura.

Figura 7.- Secuencia de mallas h -adaptativa

La siguiente gráfica muestra la evolución del error estimado relativo durante el proceso:

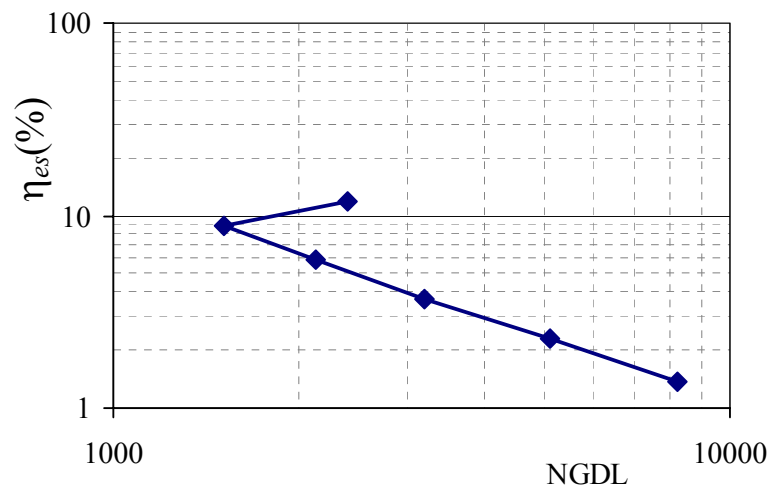


Figura 8.- Evolución del error relativo estimado con el refinamiento de la malla.

Se puede observar que el procedimiento ha comenzado con la definición de una malla con tamaño de elemento uniforme en la que se ha estimado un error de un 11.83%. En el procedimiento adaptativo se ha especificado que el error se reduzca paulatinamente hasta que sea inferior a un 1.5%. Obsérvese que en las mallas 2 y 3, pese a tener un número de grados de libertad (y por tanto de elementos y nodos) inferior al de la malla 1, se obtienen errores inferiores. Esto es debido a que en el procedimiento de generación de la malla los elementos se ha distribuido adecuadamente sobre el componente, situando los elementos de menor tamaño en las inmediaciones de la grieta y de los concentradores de tensión.

De entre todos los tipos de procedimientos adaptativos de análisis este es el más extendido.

6.2.- Procedimientos p -adaptativos

En los procedimientos p -adaptativos se varía el grado de los polinomios de interpolación manteniendo el tamaño de los elemento ($h_{nueva} = h_{actual}$)

Conceptualmente este procedimiento difiere del anterior en el hecho de que en este caso la mejora de la solución se produce aumentando el grado de las funciones de interpolación en los elementos con mayor error. En este tipo de análisis se utilizan las funciones de forma jerárquicas analizadas anteriormente en el temario.

La estimación de error con la formulación p del MEF es más complicada que en la formulación h , por lo que son pocos los programas comerciales que incorporan procedimientos p -adaptativos de análisis.

6.3.- Procedimientos hp -adaptativos

En los procedimientos hp -adaptativos se varía tanto el tamaño de los elementos como el grado de las funciones de interpolación. Tan solo el programa *ProPHLEX* (anteriormente *COMCO*) incorpora un procedimiento automático hp -adaptativo.

La ventaja de los procedimientos hp -adaptativos de análisis se puede observar claramente en la siguiente gráfica. En ella se representa la forma en que disminuye el error de la solución de un problema con solución singular conforme se aumenta el número de grados de libertad del modelo (y por lo tanto el coste computacional) con diferentes técnicas de reducción del error de discretización.

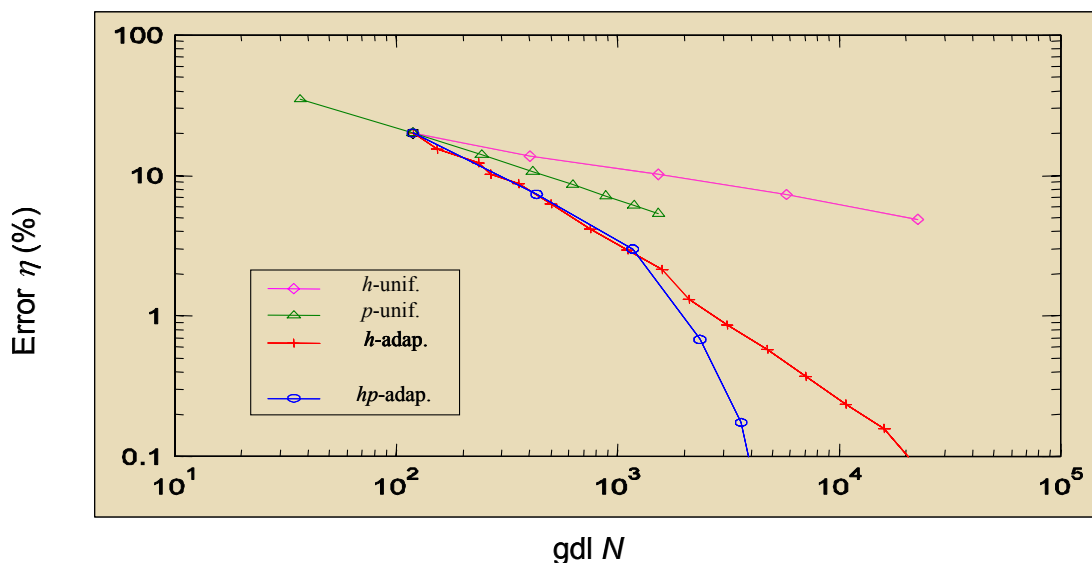


Figura 9.- Evolución del error mediante diferentes estrategias adaptativas.

Se observa claramente que la técnica más efectiva para alcanzar el error especificado es el procedimiento hp -adaptativo.

El problema correspondiente a los datos de la gráfica anterior es el de un dominio en "L". La figura siguiente muestra la 1ª malla utilizada en los análisis así como la última malla obtenida mediante un procedimiento h -adaptativo con elementos cuadráticos y la

ultima malla obtenida mediante un procedimiento *hp*-adaptativo desarrollado en el Área de Ingeniería Mecánica:

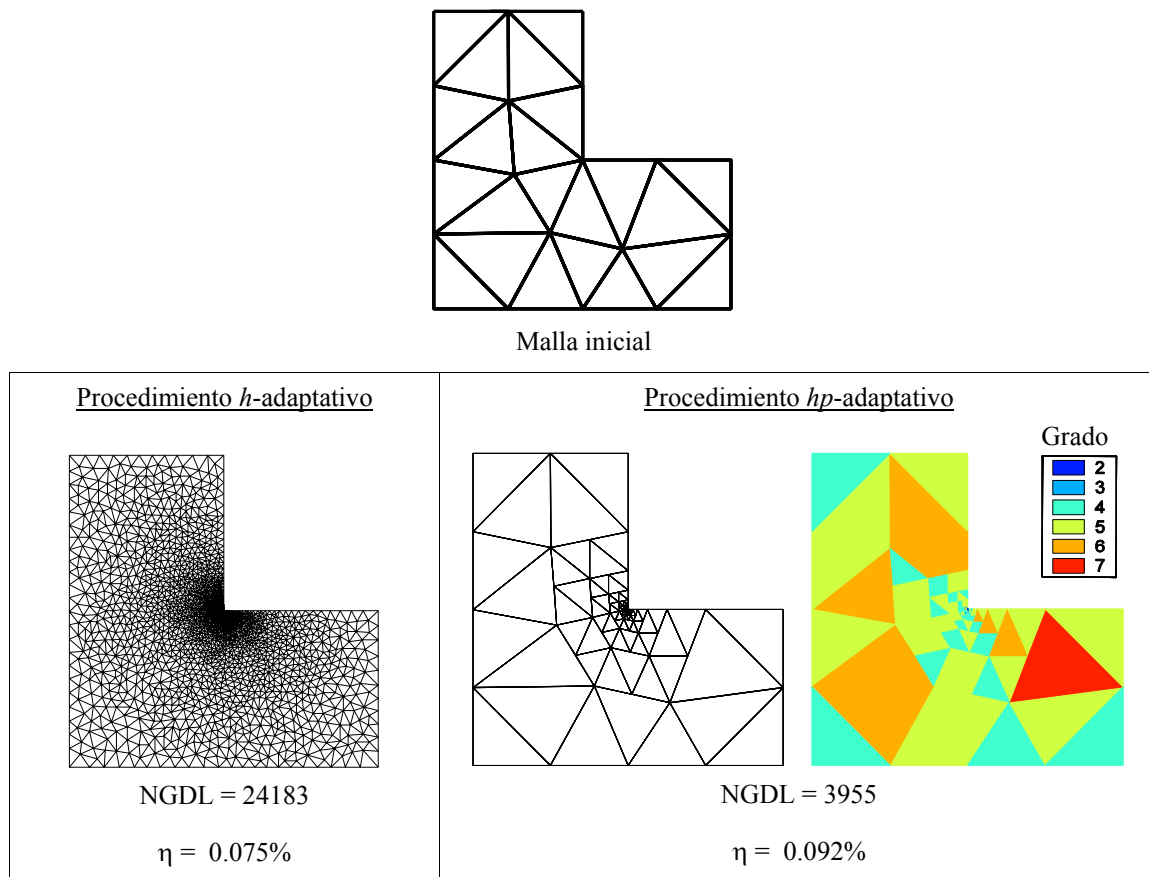


Figura 10.- Comparación de malla obtenida mediante dos procesos adaptativos

6.4.- Procedimientos *r*-adaptativos

Además de los procedimientos expuestos en las secciones precedentes, se pueden definir también otro tipo de técnicas de adaptación del modelo de EF a la solución, que son los llamados procedimientos ***r*-adaptativos**, en los que se mantiene el número de grados de libertad del problema pero se modifican las posiciones de los nodos.

La limitada memoria disponible en los ordenadores utilizados hace años para los cálculos de elementos finitos hizo que se desarrollasen métodos en los que se optimizaba la localización de los nodos de la malla para minimizar el error de discretización del análisis sin que se aumentase el número de grados de libertad del modelo.

En realidad, este tipo de procedimiento adaptativo no es un procedimiento de refinamiento real ya que en general no se puede garantizar que se vaya a poder obtener una solución con la precisión especificada.

La figura siguiente muestra un ejemplo de este tipo de procedimientos utilizado en un análisis de frecuencias naturales y modos de vibración de una placa cuadrada empotrada en todo el perímetro.

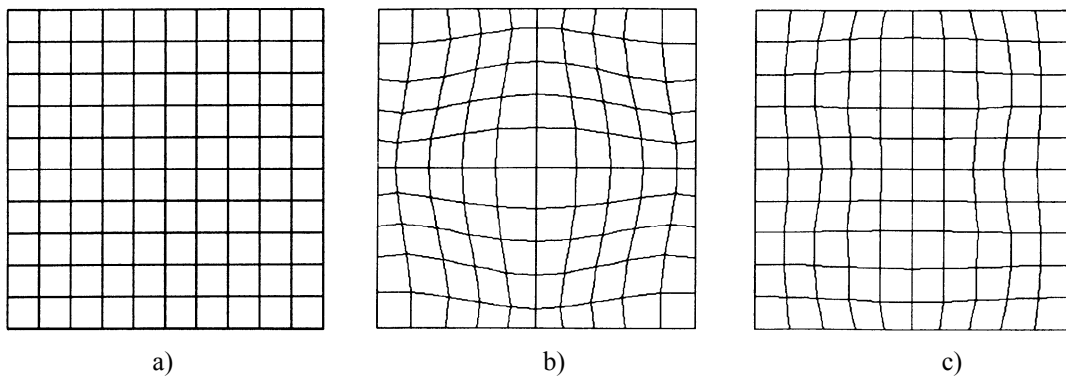


Figura 11.- Ejemplo de procedimiento r -adaptativo.
a) Malla original, b) Malla optimizada para el análisis del 1^{er} modo de vibración,
c) Malla optimizada para el análisis del 2^o modo de vibración

En la actualidad no se utilizan este último tipo de procedimientos de análisis.

7.- BIBLIOGRAFÍA

Zienkiewicz OC y Taylor RL. *The Finite Element Method. Volume 1. The Basis. 5ª Edición.* Butterworth Heinemann, 2000 (1ª edición publicada en 1967 por McGraw-Hill)

Burnett DS. *Finite Element Analysis. From concepts to applications.* Addison-Wesley, 1987

Huges TJR. *The Finite Element Method. Linear static and dynamic finite element analysis.* Prentice Hall, 1987

Szabô B y Babuška I. *Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, 1991