Bucaramanga, 26 de junio de 2015
Material didáctico, Modelado y Simulación
Profesor: David A. Miranda, Ph.D

MODELO FÍSICO DE LAS PROPIEDADES ELÉCTRICAS PASIVAS DE MEDIOS HETEROGÉNEOS

1. Planteamiento del problema

Estudiar la respuesta de un cierto medio a un estímulo de corriente o una diferencia de potencial. La respuesta del medio puede ser una corriente o una diferencia de potencial.

Se quieren estudiar las características eléctricas pasivas del sistema, por lo cual queremos estudiar cómo responde el sistema ante una excitación. En este caso de estudio se parte del conocimiento de la permitividad eléctrica del medio, en todos los puntos del espacio, $\epsilon(x,y,z) = \epsilon_0 \epsilon_R(x,y,z)$ y la conductividad eléctrica del medio, $\sigma(x,y,z)$. Además, como se está resolviendo el problema directo, se conoce la excitación, por ejemplo la densidad de corriente y se quiere conocer la diferencia de potencial en todo punto del espacio.

2. Modelado

La electrodinámica se puede describir por la ecuaciones de Maxwell:

Ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\left\{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon}\right\}$$

Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left\{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B} \cdot d\vec{s}\right\}$$

Ley de Gauss para campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

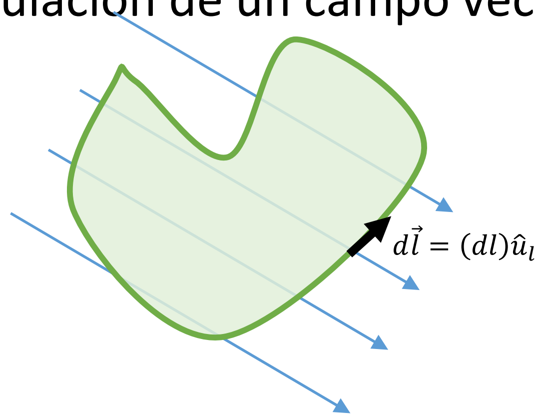
$$\left\{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0\right\}$$

Ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} - \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

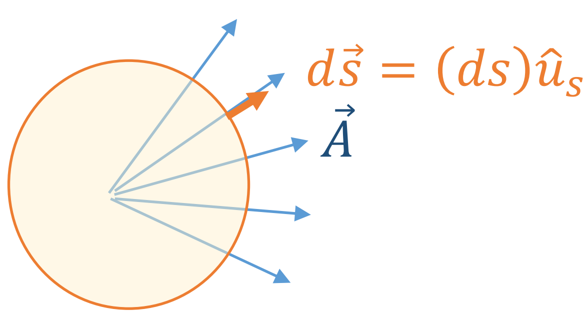
$$\left\{ \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I - \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \right\}$$

Circulación de un campo vectorial: $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$



Flujo de un campo vectorial en una superficie cerrada:

$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$



$$\lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\int_\Omega d\Omega}$$

$$= \lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right) \cdot d\vec{s}}{\int_\Omega \mathrm{dxdydz}}$$

$$= \lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint A_x dydz}{\int_\Omega \mathrm{dxdydz}} + \frac{\oint A_y dxdz}{\int_\Omega \mathrm{dxdydz}} + \frac{\oint A_z dxdy}{\int_\Omega \mathrm{dxdydz}}$$

Como $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$

Además $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int f(x)dx}{\Delta x} = f(x)$ y $\lim_{\Omega\to 0} \frac{\oint A_x dydz}{\int_\Omega \mathrm{dxdydz}} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$

Entonces: $\lim_{\Omega \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\int_{\Omega} d\Omega} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Para campos eléctricos de frecuencia menor a $10\ MHz$ se puede utilizar la aproximación cuasi-estacionaria, con la cual el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

La ley de Gauss determina la relación entre el campo eléctrico y la distribución de cargas eléctricas en el

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Nótese que en la ley de Gauss las características asociadas a la distribución de cargas y el medio donde están inmersas se representan por la densidad de carga, ρ y la permitividad eléctrica, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_R$, respectivamente. Entonces, si se quiere estudiar un medio que tiene características de disipación de energía, se necesita un modelo que describa este tipo de situaciones. Un buen modelo para describir las propiedades conductoras de un medio consiste en usar la ley de Ohm en su forma vectorial:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Además, como las cargas no se crean ni destruyen, al modelo se le deben incluir las condiciones de continuidad:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Al unir las anteriores ecuaciones, se obtiene:

$$\boldsymbol{\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \varphi) = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi}$$

Si la excitación es armónica de la forma:

$$\varphi = \varphi_r(x, y, z) e^{j\omega t}$$

Entonces, la ecuación que describe el sistema está dada por:

$$\boldsymbol{\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \varphi) = -j\omega \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi}$$