Bucaramanga, 20 de mayo de 2015

Modelado y Simulación, primer evaluación formativa.
Profesor: David A. Miranda, Ph.D

Preguntas a resolver

- Conceptos básicos de programación: escriba, para cada caso a continuación, un corto script en Python.
    - El usuario introduce tres números cualquiera y el programa le dice cuál es el mayor, cuál es el menor y le devuelve un arreglo numpy con los números ordenados ascendentemente. Para este caso use dos métodos de solución: primero, con *if*, *else* y segundo, con el objeto *sort* de *numpy*.
    - El usuario introduce dos números enteros positivos *n* y *m*, con *n* < *b*. El programa grafica los polinomios de Hermite del polinomio *n, n+1, …* al *m*.
    - Evalúe la respuesta a un pulso, un impulso y una función sinusoidal para un cierto sistema modelado por la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y[n+2] = x[n+2] + 0.2x[n+1] - 0.4x[x] + 2y[n+1] - y[n]$$

    - Compare el cálculo analítico con el cálculo numérico por los métodos del trapecio y Simpson para la siguiente integral:

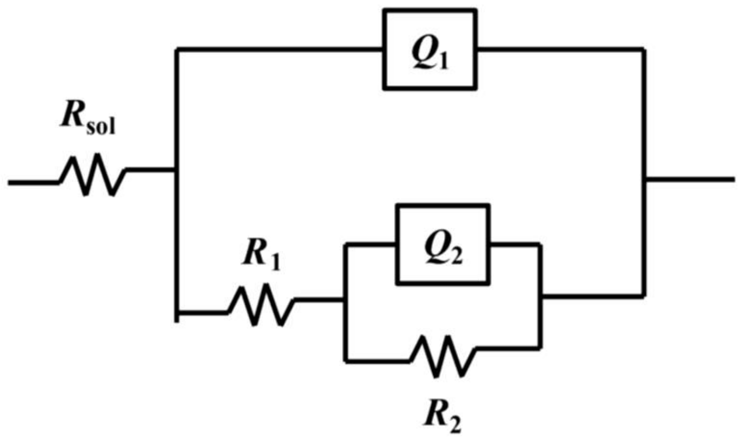
$$\int_{-1}^{3}\left[x^2(2x+3) + \frac{(2x+3)^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} + e^{-\frac{x}{10}}\right]dx$$

- Algebra lineal en Python.
    - Dibuje un circuito con mínimo cuatro capacitores diferentes (ningún capacitor puede estar en serie o paralelo con otro) y mínimo cinco resistencias diferentes. Calcule la corriente y la diferencia de potencial para cada elemento del circuito, para lo cual asuma que la excitación es sinusoidal con una cierta frecuencia y plantee el sistema de ecuaciones algebraicas que describe el circuito. Solucione el sistema de ecuaciones algebraicas empleando objetos de la librería *numpy*.
    - Empleando objetos de la librería *numpy*, encuentre la transformación unitaria que transforma la siguiente matriz en una matriz diagonal por medio de una relación de semejanza. Además, calcule la matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \\ 1 & 32 & 243 & 1024 & 3125 \end{pmatrix}$$

- Gráfica de funciones: grafique las siguientes funciones.
    - Para un cierto valor de ϕ, grafique los tres primeros armónicos esféricos para los respectivos ordenes *m*: $Y_n^m(\theta,\phi)$
    - Para un cierto valor de θ, grafique los tres primeros armónicos esféricos para los respectivos ordenes *m*: $Y_n^m(\theta,\phi)$
- Modelado y simulación de un sistema por elementos circuitales: sea un sistema electroquímico el cual se puede modelar por el siguiente circuito eléctrico, donde $Q_1 \neq Q_2$ se pueden modelar como capacitores. Selecciones valores razonables para los diferentes

elementos del circuito (justifique su selección), plantee el sistema de ecuaciones diferenciales para el circuito y responda a los siguientes ítems:



- Dibuje el diagrama corriente-voltaje (voltamperometría) para tres señales de excitación tipo rampa con pendientes, en V/s, diferentes. ¿Cuál es el efecto de la pendiente de la señal rampa?
- Para una excitación continua (que no varía en el tiempo) ¿cuánto es la corriente que circula por cada elemento circuital?
- Implemente un algoritmo que calcule la impedancia para diferentes frecuencias utilizando detección sincrónica de fase (ver descripción incluida en el marco conceptual).
- Para no menos de diez frecuencias diferentes, en escala logarítmica para las abscisas, dibuje la parte real, imaginaria, magnitud y fase de la impedancia calculada con el algoritmo de detección sincrónica de fase.

Forma de entrega

Cada estudiante debe resolver los ejercicios propuestos individualmente y presentar un reporte corto, no más de cinco páginas, donde resuma los resultados obtenidos. Además, debe adjuntar como anexos los diferente script Python escritos para resolver cada parte de esta evaluación formativa. En el documento a entregar deben estar claramente referenciados los anexos.

Fecha de entrega

La fecha de entrega será el 29 de mayo de 2015.

Marco conceptual

Para la esta primera evaluación formativa cada estudiante del curso deberá estudiar cuidadosamente los temas trabajados en el curso hasta el momento, lo cual incluye:

- Conceptos básicos de programación en Python.
  - Uso de objetos numéricos *numpy*, incluidos los de algebra lineal
  - Uso de objetos gráficos *matplotlib.pyplot*
  - Uso de objeto *lfilter* para manipulación de diferencias finitas
  - De la librería *scipy.integrate*, estudiar la integración numérica del trapecio ($trapz$) y de Simpson (*simps*)

    - Estructuras de control básicas: *if, else, while* y *for*
- Sistemas de ecuaciones diferenciales aplicados al estudio de impedancias eléctricas.
- Determinación de la impedancia de un sistema a partir de excitaciones sinusoidales. Se sugiere usar el concepto de detección sincrónica de fase, para lo cual básicamente se multiplica la señal de respuesta del sistema por una función sinusoidal en fase con la excitación y en cuadratura. A continuación se presenta un ejemplo simple:

Sea un sistema que se puede modelar por la impedancia $Z = R - \frac{j}{\omega C}$, donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular de la excitación sinusoidal $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$. La respuesta en voltaje del sistema está dada por $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Sea $x = v(t) \sin(\omega t)$ y $y = v(t) \cos(\omega t)$. Note que la función sinusoidal que multiplica a la respuesta de voltaje, $v(t)$, en x está en fase con la corriente, mientras que la que multiplica la respuesta de voltaje en y está en cuadratura con la corriente, es decir, desfasada 90º. Si se calcula el valor medio de x e y, entonces, se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \; = \frac{V_0}{2}\cos(\phi)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\int_T y(t)dt \; = \frac{V_0}{2}\sin(\phi)$$

Entonces, la parte real de la impedancia corresponde al término en fase con la excitación mientras que la parte imaginaria corresponde al término en cuadratura (desfase de 90º) con la excitación:

$$real(Z) = \frac{2\bar{x}}{I_0}$$

$$imag(Z) = \frac{2\bar{y}}{I_0}$$

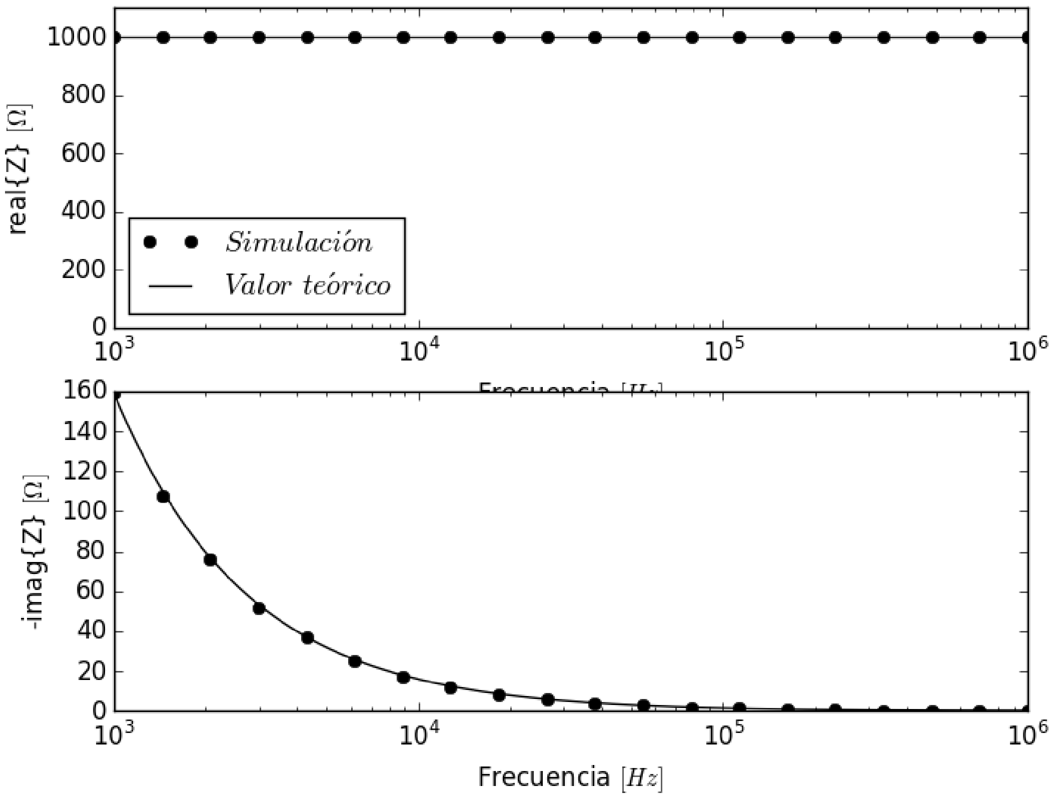
Por ejemplo, para el modelo propuesto, $Z = R - \frac{j}{\omega C}$, la ecuación diferencial que describe este sistema está dada por:

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

Al discretizar la ecuación diferencial que describe el sistema, empleando un intervalo de muestreo τ, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$v[n+1] = v[n] + \left[\frac{\tau}{2C} + R\right] i[n+1] + \left[\frac{\tau}{2C} - R\right] i[n]$$

Con la ecuación en diferencias finitas y excitaciones armónicas, se obtiene la curva de impedancia que se muestra a continuación. Note que la predicción teórica corresponde con la simulación realizada empleando el modelo propuesto:


1000
800
600
400
200
0
real{Z} [Ω]
Simulación
Valor teórico
10^3
10^4
10^5
10^6
Frecuencia [Hz]
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-imag{Z} [Ω]
10^3
10^4
10^5
10^6
Frecuencia [Hz]

Éxitos