MANUAL DE LABORATORIO HIDRÁULICA

PRÁCTICA 2

DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA ESPECÍFICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

Universidad Industrial de Santander

Contenido

Ilustraciones

Ecuaciones

Tablas

Laboratorio 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA ESPECÍFICA

1. Marco teórico

Partiendo de la ecuación de Bernoulli, que se puede expresar como:

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=Energía=cte$$	*Ecuación 1*

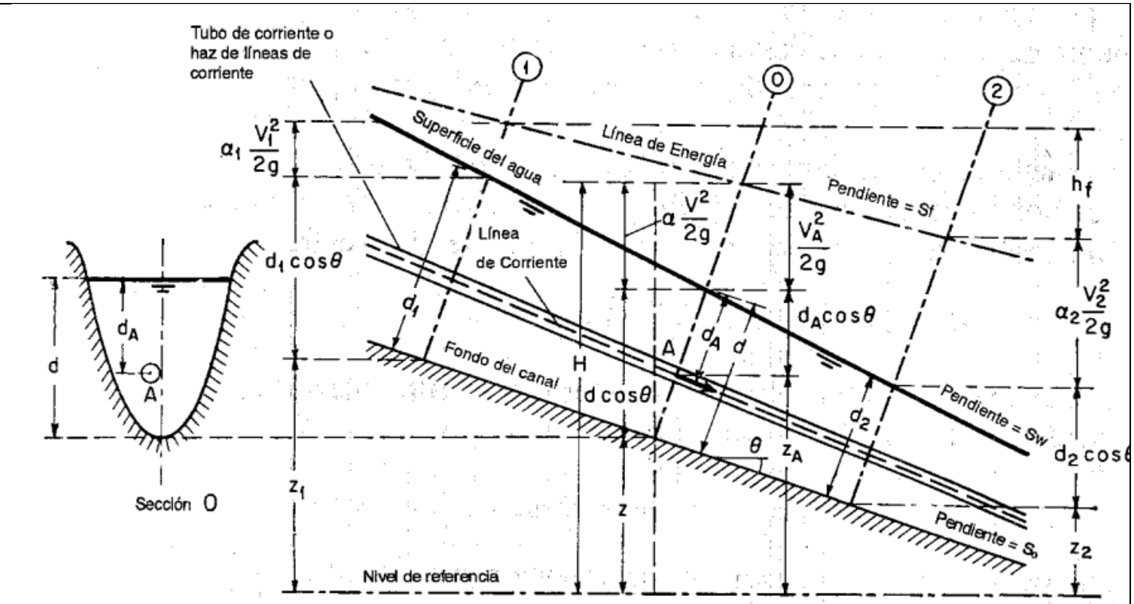


Ilustración 1:Energía de un flujo gradualmente variado en canales abiertos

Al aplicar la ecuación de Bernoulli al canal de la *Figura 1* se tiene:

$$H=Z_A+d_A\cos\theta+\frac{{V_A}^2}{2g}$$	*Ecuación 2*

Si la ecuación se aplica al punto O, situado en la base del canal la ecuación sería:

$$Z_o+d_o\cos^2\theta+\frac{{V_o}^2}{2g}=H$$	*Ecuación 3*

Para canales de pendiente pequeña $\cos^2\theta\approx 0$. Así la energía total en la sección del canal es:

$$Z_o+d_o+\frac{{V_o}^2}{2g}=H$$	*Ecuación 4*

En forma general la ecuación de Bernoulli se puede aplicar a un canal a flujo libre con pendiente pequeña de la siguiente forma:

$Z + Y + \frac{V^2}{2g} = H$	*Ecuación 5*

La razón por la cual es aplicable a pendientes pequeñas del canal es que se debe garantizar que la distribución de presiones sea hidrostática, lo cual ocurre si la pendiente del fondo del canal es pequeña o si no existe aceleración en el fluido, el término $d_v/d_t = 0$. Esta aplicación de la ecuación de Bernoulli a un canal a flujo libre define que la superficie libre del canal coincide con la línea piezométrica.

1.1. Energía específica

La energía específica en la sección de un canal se define como la energía medida con respecto al fondo del canal. De este modo de acuerdo con la *ecuación 5*, con $Z = 0$, la energía específica se hace:

$E = Y + \frac{V^2}{2g}$	*Ecuación 6*

Esta indica que la energía específica es igual a la suma de la profundidad del agua y la cabeza de velocidad. Ya que $V = \frac{Q}{A}$, la *ecuación 6* se puede escribir de la siguiente manera:

$E = Y + \frac{Q^2}{2gA^2}$	*Ecuación 7*

Sabiendo que:

$q = \frac{Q}{b} \quad y \quad A = Y * b$	*Ecuación 8*

Para un canal rectangular se entiende que el caudal por unidad de ancho se puede definir como:

$E = Y + \frac{q^2}{2gY^2}$	*Ecuación 9*

Se puede ver que, para un canal de sección rectangular y para un caudal Q determinado, la energía específica en la sección de un canal es una función de la profundidad de flujo solamente. Esta conclusión también se puede obtener para un canal prismático de cualquier forma.

Cuando la profundidad del flujo se dibuja como función la energía específica E para una sección dada del canal y para un caudal, se obtiene una curva como la mostrada en la *Figura 2*.

Esta curva tiene dos partes AC y BC. La parte AC se aproxima al eje horizontal asintóticamente hacia la derecha. La parte BC se aproxima a la línea OD a medida que se extiende hacia arriba y a la derecha. La línea OD es una línea que pasa a través del origen y tiene un ángulo de inclinación igual a 45 grados.

La curva muestra que, para una energía específica dada hay dos posibles profundidades, por ejemplo, la cota inferior Y_1 y la cota superior Y_2. La cota o nivel inferior y superior se llama profundidades alternas. En el punto la energía específica es mínima, se probará más adelante que esta condición de energía mínima corresponde al estado crítico del flujo. Así en el estado crítico las dos profundidades alternas aparente mete se hacen una sola, la cual es conocida como la profundidad crítica Y_c.

Cuando la profundidad del flujo es más grande que la profundidad crítica, la velocidad del flujo es menor que la velocidad crítica para la correspondiente descarga y entonces, el flujo es subcrítico. Por lo tanto, Y_1 es la profundidad de un flujo supercrítico, y Y_2 es la profundidad de un flujo subcrítico.[1]

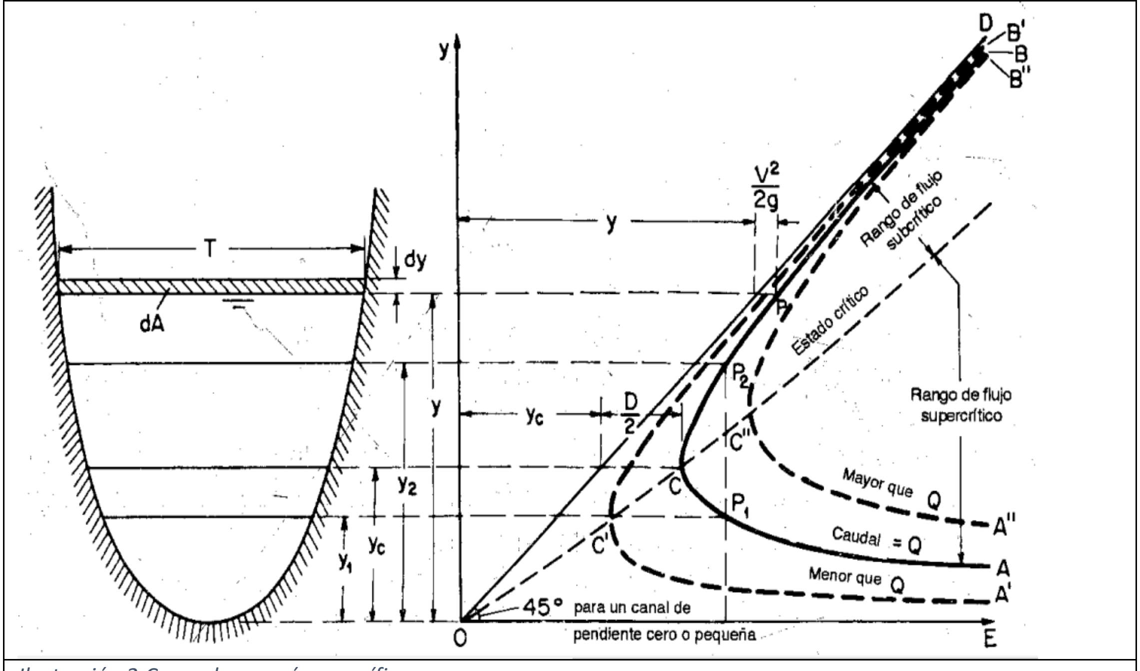


Ilustración 2:Curva de energía específica

Si los caudales cambian, la energía específica cambiará en consecuencia. las curvas A'B' y A''B'' ver *Figura 2,* representan posiciones de la curva de energía específica cuando el caudal es menor y más grande respectivamente, que el caudal usado para la construcción de la curva AB.[1]

1.2. Flujo Crítico

Si la ecuación que define matemáticamente el concepto de energía específica para un canal regular (*Ecuación 7)* se deriva con respecto a Y, y observando que Q es constante se obtiene:

$$\frac{dE}{dY} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dY} = 1 - \frac{V^2}{gA}\frac{dA}{dY}$$	*Ecuación 10*

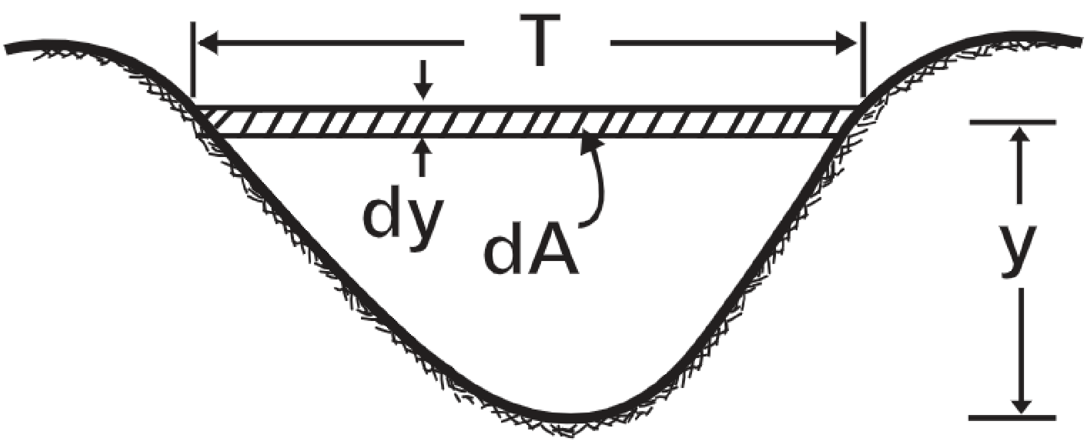


Ilustración 3:Sección trasversal canal irregular[2]

El diferencial de área mojada dA cerca de la superficie libre (*Figura 3)* es igual a $T\ dy$. Ahora $dA/dy = T$, y la profundidad hidráulica es $D = A/T$ luego la anterior ecuación se convierte en

$$\frac{dE}{dY} = 1 - \frac{V^2 T}{gA} = 1 - \frac{V^2}{gD}$$	*Ecuación 11*

En el estado crítico de flujo la energía específica es mínima o $dE/dy = 0$. La anterior ecuación, por consiguiente, da:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2}$$	*Ecuación 12*

Este es el criterio para flujo crítico, el cual establece que en el estado crítico del flujo la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica. La anterior ecuación también se describe cómo $V/\sqrt{gD} = 1$, lo cual significa que $\boldsymbol{F} = 1$; lo que concuerda con la definición de flujo crítico.

Si el anterior criterio va a utilizarse en cualquier problema debe satisfacer las siguientes condiciones

- Flujo paralelo gradualmente variado
- Canal con pendiente baja
- Coeficiente energía supuesto igual a la unidad[1]

Si se considera un canal rectangular y se introduce el caudal por unidad de ancho, partiendo de la ecuación de continuidad (*Ecuación 10)* se tiene que la energía específica en canales rectangulares también puede ser de la forma:

$(E - Y)\,Y^2 = \dfrac{q^2}{2g}$	*Ecuación 13*

Ecuación cúbica con tres raíces y que tiene a las rectas $Y = 0$ y $Y = E$ como asíntotas.[3]

1.3. Flujo Crítico en Canales Rectangulares

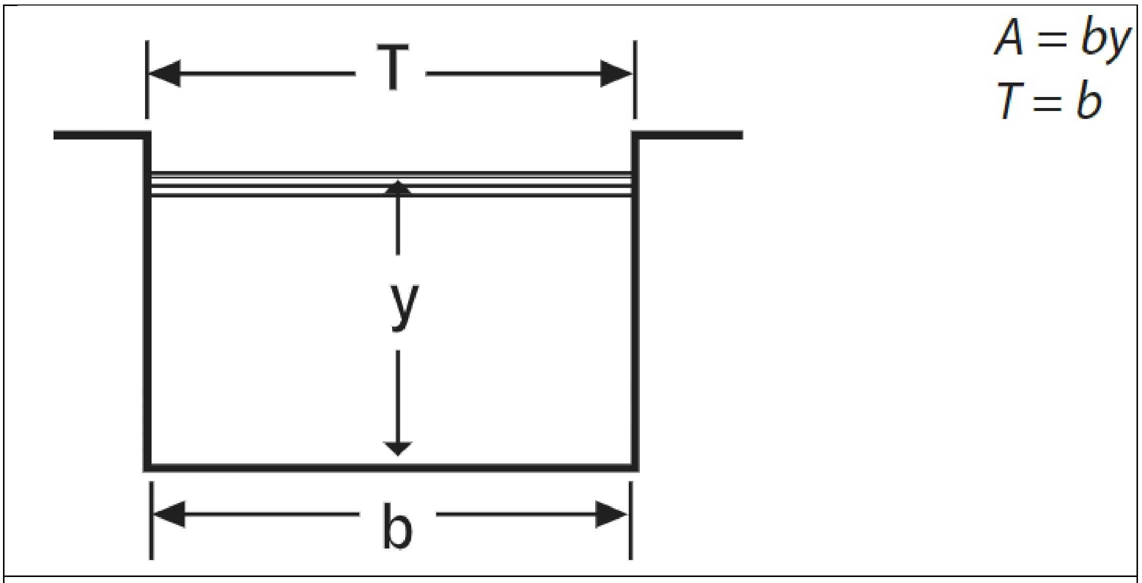


Ilustración 4: Sección rectangular

Derivando la *(Ecuación 10)* respecto a Y tenemos:

$\dfrac{dE}{dY} = 1 - \dfrac{q^2}{gY^3}$	*Ecuación 14*

Evaluando la segunda derivada se tiene:

$\dfrac{d^2Y}{dE^2} = \dfrac{3\,q^2}{g\,Y^4}$	*Ecuación 15*

Si la (*Ecuación 15)* se hace igual a cero se obtiene:

$q^2 = g\ Y^3$	*Ecuación 16*

La cual de acuerdo con el signo positivo de la segunda deriva corresponde a condiciones de energía especifica mínima. La profundidad que corresponde a las condiciones de energía especifica mínima. La profundidad que corresponde a las condiciones para las cuales el caudal fluye con energía específica mínima se conoce con el nombre de profundidad crítica y divide los dos limbos en el flujo subcrítico y supercrítico, representado por el punto C. su valor en forma explícita está dado por:

$Y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$	*Ecuación 17*

De la Ecuación 18 se obtiene:

$\frac{q^2}{{Y_c}^2} = {V_c}^2 = g\ Y_c$	*Ecuación 18*

Y de la ecuación de energía específica se transforma a:

$E_c = Y_c + \frac{{V_c}^2}{2\ g} = Y_c + \frac{g\ Y_c}{2\ g} = \frac{3}{2}\ Y_c$	*Ecuación 19*

Lo que indica que la energía mínima se presenta cuando el nivel de la superficie alcanza la altura crítica y su valor es $2/3\ Y_c$.[3]

2. Objetivos

1) Comprobar experimentalmente la ecuación de energía específica deducida teóricamente para un canal prismático con flujo uniforme y dependiente pequeña

2) Evaluar las diferencias entre los resultados obtenidos con las ecuaciones teóricas y los datos obtenidos en el laboratorio

3) Establecer cuáles son las posibles fuentes de error en el laboratorio y la forma de reducirlos

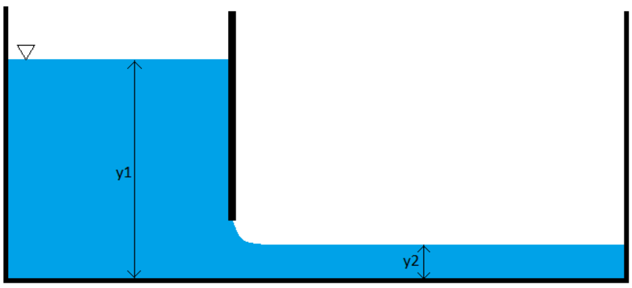
3. Procedimiento

- Colocar en funcionamiento el sistema y esperar que se estabilice el flujo
- Para este caudal elegir una altura de la compuerta con respecto al fondo del canal (W)
- esperar a que se estabilice nuevamente el flujo
- medir la altura de la compuerta W, la altura Y_1 aguas arriba de la compuerta y la altura Y_2 aguas abajo el ancho el canal y tomar el valor del caudal en el medidor de flujo
- variar la altura de la compuerta para un total de cuatro posiciones diferentes y repetir los numerales 3 y 4

4. Equipo Utilizado

- Canal rectangular de vidrio
- Compuerta graduable
- Medidor de flujo electromagnético
- Sistema de bombeo
- Cronómetro, regla o metro

5. Datos



Base canal [m]: 0.412

Q teórico [L/s]: 24.39 24.29 24.18

Altura de la compuerta	
6 cm	
y1 [cm]	18.5
y2 [cm]	3.5

Altura de la compuerta	
5 cm	
y1 [cm]	23.4
y2 [cm]	3

Altura de la compuerta	
4 cm	
y1 [cm]	32.7
y2 [cm]	2.5

Tabla 1: Datos de la practica

6. Calculo Tipo

Se realizará el cálculo tipo con la altura de la compuerta de 6 cm. Donde w es esta altura y b es el ancho de la base del canal.

$$w = 0.060\ [m]$$

$$b = 0.412\ [m]$$

El caudal promedio se calcula a continuación.

$$Q_{prom} = \frac{24.39 + 24.29 + 24.18}{3} = 24.29E - 3\ [m^3/s]$$

$$Caudal\ por\ unidad\ de\ ancho\ q = \frac{Q}{b} = \frac{24.29E - 3}{0.412} = 0.05895\ \left[\frac{m^3/s}{m}\right]$$

Hallar V_1 y V_2 usando los tirantes en cada punto.

$$V_1 = \frac{q}{y_1} = \frac{0.05895}{0.185} = 0.319\ [m/s]$$

$$V_2 = \frac{q}{y_2} = \frac{0.05895}{0.035} = 1.684\ [m/s]$$

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2 * g} = 0.185 + \frac{0.319^2}{2 * 9.81} = 0.190\ [m]$$

$$E_2 = 0.035 + \frac{1.684^2}{2 * 9.81} = 0.180\ [m]$$

Tomando la energía en el punto 1 como teórica, esto debido a que la variación es poca respecto a ligeros cambios en la medida del tirante, se calcula un error.

$$\%E1 = \left|\frac{0.190 - 0.180}{0.190}\right| * 100 = 5.6\%$$

Para obtener un valor de tirante teórico, igualamos las energías en el punto y despejamos el valor de y_2 y reemplazamos la velocidad como el caudal por unidad de ancho sobre el tirante.

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 = y_2 + \frac{V_2^2}{2 * g} = y_2 + \frac{q^2}{2 * g * y_2^2}$$

$$0.190 = y_2 + \frac{0.05895^2}{2 * 9.81 * y_2^2}$$

De la ecuación anterior tenemos 3 resultados, que se muestran a continuación:

$$y_{21} = -0.028465\ [m]$$

$$y_{22} = 0.03364\ [m]$$

$$y_{23} = 0.185011\ [m]$$

$$\%E2 = \left|\frac{0.03364 - 0.035}{0.03364}\right| * 100 = 4.0\%$$

Para el análisis de resultados, calculamos el valor de tirante crítico y la energía critica que corresponde a su menor valor.

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{0.05895^2}{9.81}} = 0.071\ [m]$$

$$E_c = \frac{3}{2} * y_c = 0.106\ \ [m]$$

7. Resultados

$W\ [cm]$	$y_1[m]$	$y_2[m]$	$V_1[m/s]$	$V_2[m/s]$	$E_1[m]$	$E_2[m]$	$\%Error\ 1$	$y_{2t}[m]$	$\%Error\ 2$	$y_c[m]$	$E_c[m]$
6	0,185	0,035	0.319	1,684	0,190	0,180	5,6%	0,034	4,0%	0,071	0,106
5	0,234	0,03	0,252	1,965	0,237	0,227	4,4%	0,029	2,8%	0,071	0,106
4	0,327	0,025	0,180	2,358	0,329	0,308	6,2%	0,024	3,7%	0,071	0,106

Tabla 2:Resultados

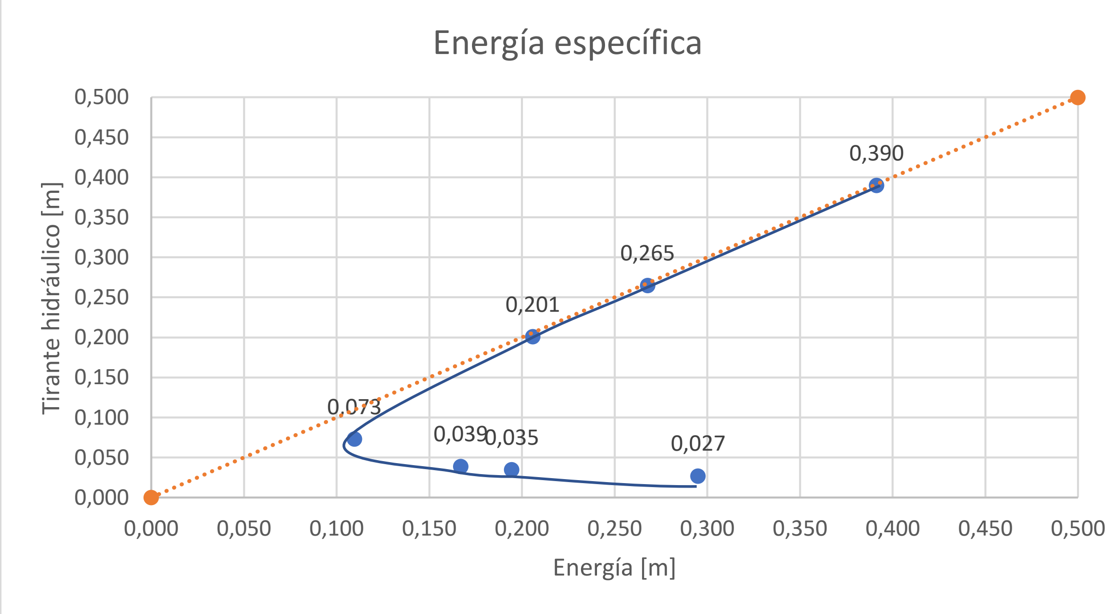


Ilustración 5: Energía especifica

8. Observaciones y Conclusiones

¿En qué casos es conveniente utilizar el principio de conservación de energía, en la forma de energía total H, y en qué casos en la forma de energía específica E?

¿Qué factores que ocurren en el canal no se incluyen en los cálculos efectuados en esta práctica?

¿Qué ocurre con la profundidad del agua antes de la compuerta y por qué?

9. Bibliografía

[1] G. E. GAVILAN LEON, *GUIA DE LABORATORIO DE HIDRAULICA DE CANALES ABIERTOS*. Bucaramanga: UISEscuela de Ingenieria Civil, 2001.

[2] V. T. CHOW, *HIDRAULICA DE CANALES ABIERTOS*. Santafe de Bogota: McGraw-Hill, 2000.

[3] M. V. Béjar, *Hidráulica de canales*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2008.

[4] V. T. CHOW, *HIDRAULICA DE CANALES ABIERTOS*. Santafe de Bogota: McGraw-Hill, 1954.