UNIDAD II. SUMATORIAS

METAS DE APRENDIZAJE

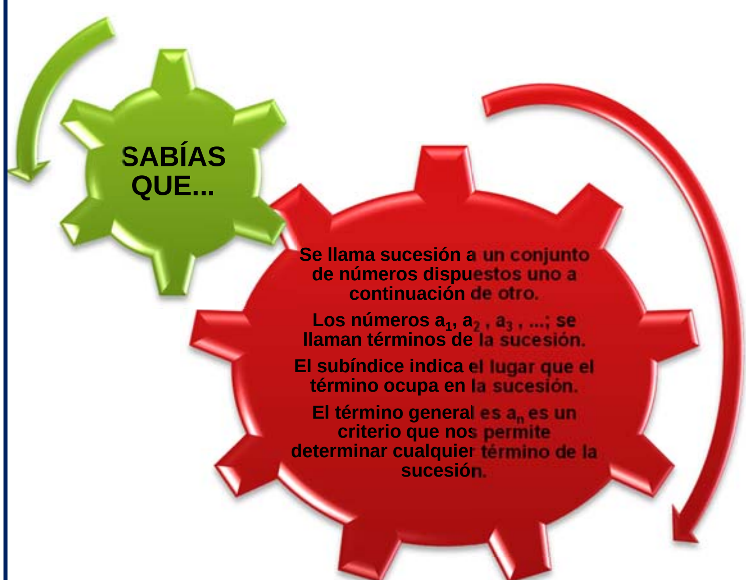
Al finalizar la unidad, el estudiante estará en capacidad de:

- Reconocer el significado de la sumatoria en un contexto real
- Aplicar las propiedades de las sumatorias para demostraciones matemáticas

INTRODUCCIÓN

El símbolo Σ se llama Sigma en el alfabeto griego y en español corresponde a la letra S. Es natural usar este símbolo para referirse a la idea de Suma, o bien, sumatoria. Con el símbolo Σk^2, por ejemplo, se desea indicar la suma de los términos de la forma k^2 para varios valores enteros de k. El rango para estos valores enteros se indica en la parte inferior y superior respectivamente de □. Por ejemplo en la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \quad o \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$



Una sumatoria es un símbolo que se ocupa para denotar en forma comprimida la suma sucesiva de los términos de una sucesión expresados como sumandos.

Las sumatorias tienen múltiples aplicaciones. En ingeniería, ésta es útil para comprender el concepto de integral.

Además, en Estadística es muy común encontrar datos en los que se requiere determinar la suma de variables.

Existen ciertas propiedades que permiten simplificar el desarrollo matemático de las sumatorias e incluso pueden dar lugares a reglas o "fórmulas" que son susceptibles de ser demostradas por el principio de Inducción Matemática.

A continuación se relacionan las propiedades de las sumatorias y se estudiarán algunas de ellas en detalle mediante la presentación de ejercicios resueltos.

PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$

3. $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

4. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

5. $\sum_{k=1}^{n} (4k-1) = n(2n+1)$

6. $\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n+1)$

7. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$, c constante.

9. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k) + \sum_{k=1}^{n} (b_k)$

10. $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$, c constante.

11. $\sum_{k=a}^{b} a_k = \sum_{k=a+c}^{b+c} a_{k-c}$,

12. $\sum_{k=a}^{b} a_k = \sum_{k=a-c}^{b-c} a_{k+c}$,

13. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

14. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

15. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

16. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

17. $\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}-1}{t-1}$

PROPIEDADES TELESCÓPICAS

18. $\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

19. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$

20. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}$

21. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$

EJERCICIOS RESUELTOS DE SUMATORIAS

1. El abuelo de Carlos le ofrece: "mira Carlitos; hoy te daré 500 bolitas, mañana 1000 bolitas, pasado mañana 1500 bolitas, al otro día 2000 bolitas y así sucesivamente 500 bolitas más que el día anterior por dos años; o bien si tu prefieres, hoy te doy una bolita, mañana 2 bolitas, pasado 4 bolitas, al otro día 8 bolitas y así sucesivamente el doble de bolitas que el día anterior por un mes. Bien Carlitos, qué prefieres?". Si Ud. fuese Carlos, cuál de las opciones tomaría?

   Solución:

   Carlitos tiene dos opciones: La primera podríamos representarla en notación de sumatoria, de la siguiente manera: $\sum_{k=1}^{730} 500\ k$

   Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 10, podemos resolver esta opción

$$\sum_{k=1}^{730} 500\ k = 500 \sum_{k=1}^{730} k = 500 \cdot \frac{730\ (731)}{2} = 133.407.500 \ \ bolitas$$

   Ahora, la segunda opción se puede representar como: $\sum_{k=0}^{29} 2^k$

   Usando la propiedad 17, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{29} 2^k = \frac{2^{30}-1}{2-1} = 1073.741.823 \ \ bolitas$$

   Por lo que Carlitos debería escoger la **opción 2.**

2. Halle una expresión para la sumatoria: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

   Solución:

   El enunciado da a entender que se cumple la propiedad telescópica. Verificamos si se cumple

$$Si \ \ a_k = \frac{1}{k},\ a_{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

   Esto indica que se cumple la propiedad 18. Podemos observar que: $a_1 = \frac{1}{1} = 1 y \ \ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

   Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} - 1 = -\frac{n}{n+1}$$

3. Hallar una expresión para la sumatoria $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

Solución:

En este ejercicio usaremos un pequeño artificio matemático. Es posible expresar k como k+1-1 sin contravenir ninguna regla de la aritmética.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) \cdot k!$$

Ahora, aplicando la propiedad distributiva tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) \cdot k! - \sum_{k=1}^{n} k!$$

Por la definición de factorial, sabemos que: $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$. Entonces, la expresión quedaría:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$. **ES TELESCÓPICA!!!!**

Verifiquemos si se cumple $Si\ a_k = k!,\ a_{k+1} = (k+1)!$. Esto indica que se cumple la propiedad 18.

Podemos observar que: $a_1 = 1! = 1\ y\ a_{n+1} = (n+1)!$.

Reemplazando tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

4. Encuentre una expresión para la sumatoria $\sum_{k=2}^{n+1} \sum_{j=1}^{k} 2^{k+j}$

Solución:

Este es un ejercicio de sumatorias dobles. Se resuelve primero una y luego la otra. Para la primera sumatoria, como depende de la variable **j**, asumimos como constante la variable **k**. Para la segunda sumatoria hacemos lo contrario por depender de **k**.

Usando la propiedad 12, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{k+j} = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k+1+j}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los exponentes y la propiedad 17, tenemos para la primera sumatoria lo siguiente:

$$\sum_{j=0}^{k-1} 2^{k+1+j} = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k+1} \cdot 2^{j} = 2^{k+1}\sum_{j=0}^{k-1} 2^{j} = 2^{k+1} \cdot \frac{2^k - 1}{2-1} = 2^{2k+1} - 2^{k+1}$$

También se puede expresar esta respuesta así:

$$2 \cdot (4^k - 2^k)$$

Ahora estamos listos para resolver la segunda sumatoria

$$\sum_{k=2}^{n+1} 2 \cdot (4^k - 2^k)$$

Primero usemos la propiedad 12.

$$\sum_{k=2-2}^{n+1-2} 2 \cdot (4^{k+2} - 2^{k+2}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot (4^{k+2} - 2^{k+2})$$

Separando las sumatorias, usando la propiedad 9:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2 \cdot (4^{k+2} - 2^{k+2}) = \sum_{k=0}^{n-1} 32 \cdot 4^k - \sum_{k=0}^{n-1} 8 \cdot 2^k$$

La solución final sería entonces, usando la propiedad 17:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 32 \cdot 4^k - \sum_{k=0}^{n-1} 8 \cdot 2^k = 32 \cdot \frac{4^n - 1}{4-1} - 8 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}$$

$$32 \cdot \frac{4^n - 1}{3} - 8 \cdot \frac{2^n - 1}{1} = \frac{8}{3}\left(4 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^n - 1\right)$$

5. Encuentre el valor de n que cumple con la igualdad. $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 1680$

Solución:

Resolviendo la sumatoria usando las propiedades 3 y 8, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n(n+1) + n$$

Entonces podemos igualar:

$$n(n+1) + n = 1680 \qquad \rightarrow \qquad n^2 + 2n - 1680 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, la variable n tiene dos posibles valores: n=40 y n=-42. La segunda solución no se tiene en cuenta por ser negativa, por lo que la respuesta es **n=40**

EJERCICIOS PROPUESTOS DE SUMATORIAS

Resolver los siguientes ejercicios relacionados con sumatorias:

1. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}$

3. $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+3)(k+3)!+3\cdot 2^k - k(k+1)\right]$

4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

5. $\sum_{k=1}^{n} (2/3)^{k-1}$

6. $\sum_{k=1}^{80} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)$

7. $\sum_{k=1}^{n} 3\left(4^k+2k^2\right)-4k^3$

8. $\sum_{k=5}^{99} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

9. $\sum_{k=1}^{20} \frac{-2}{(k+1)(k+2)}$

ASÍ COMO LOS OBJETOS MÁS FÁCILES DE VER NO SON LOS DEMASIADO GRANDES NI LOS DEMASIADO PEQUEÑOS, TAMBIÉN LAS IDEAS MÁS FÁCILES EN MATEMÁTICAS NO SON LAS DEMASIADO COMPLEJAS NI LAS DEMASIADO SIMPLES.