FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Hemos visto el problema de encontrar el ***producto***, dados los ***factores***. La ***factorización*** es encontrar los ***factores***, dado el ***producto***.

Se llaman ***factores*** de una ***expresión algebraica*** aquellos que ***multiplicados*** entre sí dan como resultado la primera ***expresión***.

Ejemplo: sí; $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$

Tenemos que, $x+2$ y $(x+3)$ son ***factores*** de x^2+5x+6, así pues, ***factorizar*** una ***expresión algebraica*** es convertirla en el ***producto*** indicado.

Existen diversos ***procedimientos*** para descomponer en ***factores*** un ***producto***, los mencionaremos, sin perjuicio de que en algunos casos podamos combinar dos o más de estos ***procedimientos***.

1. FACTORIZACIÓN POR *FACTOR COMÚN*.

Cuando en los diversos ***términos*** de un ***polinomio*** participa un mismo ***factor***, se dice que se le saca como ***factor común***, para lo cual, se escribe e inmediatamente, después, dentro de un paréntesis se anotan los ***cocientes*** que resulten de ***dividir*** cada uno de los ***términos*** del ***polinomio*** entre el ***factor común***.

Ejemplos:

Factorizar los siguientes ***polinomios***:

a) $a^2+2a = a(a+2)$

b) $10b+30ab^2 = 10b(1+3ab)$

c) $10a^2+5a+15a^3 = 5a(2a+1+3a^2)$

d) $5a^3b^2x+15a^4bx^2-35a^2b^2x^4y^5 = 5a^2bx(ab+3a^2x-7bx^3y^5)$

e) $12a^2b^3-30a^3b^2+18ab^4-42a^4b = 6ab(2ab^2-5a^2b+3b^3-7a^3)$

f) $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5 = 15a^2x^2(1-2x+7x^2-5x^3)$

g) $-44ax^n+22a^2bx^{n+1}-66a^3x^{n+2} = 22ax^n(-2+abx-3a^2x^2)$

h) $x^{m+n}y^n-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m} = x^ny(x^my^{n-1}-x^ny^{m+n-1}-y^{2m-1})$

2. FACTORIZACIÓN POR *PRODUCTOS NOTABLES*.

Como su nombre lo indica consiste en aplicar los ***productos notables*** ya conocidos.

a). Factorización de una *diferencia de cuadros*.

Se sabe que: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; por lo tanto una ***diferencia de cuadrados***, es igual al ***producto*** de dos ***binomios conjugados***.

Ejemplos:

1) $9x^2 - 4y^4 = (3x)^2 - (2y^2)^2 = (3x+2y^2)(3x-2y^2)$

2) $25x^2 - 16a^2b^2 = (5x)^2 - (4ab)^2 = (5x+4ab)(5x-4ab)$

3) $x^4 - 16 = (x^2)^2 - (4)^2 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^2+4)[(x)^2 - (2)^2] =$
$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

4) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)$

b). Factorización de un cuadrado perfecto:

Del desarrollo del ***binomio al cuadrado*** se tiene:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y también $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Una cantidad es ***cuadrado perfecto*** cuando es el ***cuadrado*** de otra cantidad, así tenemos que $4a^2$ es ***cuadrado perfecto*** porqué es el ***cuadrado*** de $2a$.

Para ***factorizar*** un ***trinomio cuadrado perfecto***, una vez que ha sido identificado como tal, con apoyo de los ***productos notables***, se extrae ***raíz cuadrada*** al ***primero*** y ***tercer*** termino del ***trinomio*** separándose estas raíces por medio del ***signo*** del ***segundo*** termino y elevando este ***binomio*** al ***cuadrado***.

Ejemplos:

1) $m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = (m+1)(m+1)$

2) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$. ***Ordenando*** y ***factorizando***, se tiene:

$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x-5y)^2 = (2x-5y)(2x-5y)$

3) $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1-8ax^2)^2 = (1-8ax^2)(1-8ax^2)$

4) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x-2y)^2 = (3x-2y)(3x-2y)$

5) $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2 = (2x + y)(2x + y)$

6) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

7) $\frac{a^2}{16} - \frac{3}{2}ab + 9b^2 = \left(\frac{a}{4} - 3b\right)^2 = \left(\frac{a}{4} - 3b\right)\left(\frac{a}{4} - 3b\right)$

8) $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)$

c). Factorización de una *suma* o *diferencia de cubos*.

Se sabe que: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos:

1). **Factorizar**: $8x^3 + 216y^3$. Llevándolo al tipo de ***suma de cubos*** tenemos:

$8x^3 + 216y^3 = (2x)^3 + (6y)^3 = (2x + 6y)(4x^2 - 12xy + 36y^2)$

2). **Factorizar**: $81x^4y - 192xy^4$. Llevándolo al tipo de ***diferencia de cubos*** tenemos:

$$81x^4y - 192xy^4 = 3xy(27x^3 - 64y^3) = 3xy[(3x)^3 - (4y)^3] =$$
$$= 3xy(3x - 4y)(9y^2 + 12xy + 16y^2)$$

3). **Factorizar**: $27a^3 - 8$. Se puede ver que es una ***diferencia de cubos***, por lo que:

$27a^3 - 8 = (3a)^3 - (2)^3 = (3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)$

4). **Factorizar**: $x^3 + 1$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

5). **Factorizar**: $64x^3 + 125$.

$64x^3 + 125 = (4x)^3 + (5)^3 = (4x + 5)(16x^2 - 20x + 25)$

d). Factorización de *cubos perfectos de binomios*.

Se ha visto que: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ y que: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Ejemplos:

1) $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 = (1 + 4a)^3 = (1 + 4a)(1 + 4a)(1 + 4a)$

2) $$a^9 - 18a^6b^5 + 108a^3b^{10} - 2116b^{15} = (a^3 - 6b^5)^3 = (a^3 - 6b^5)(a^3 - 6b^5)(a^3 - 6b^5)$$

3) $$\frac{8a^3}{27} - \frac{b^3}{8} - \frac{2a^2b}{3} + \frac{ab^2}{2} = \left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{2}\right)^3 = \left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{2}\right)$$

3. FACTORIZACIÓN POR *AGRUPAMIENTO*.

Algunas veces en un ***polinomio*** los ***términos*** no contienen ningún ***factor común***, pero pueden ser separados en grupos de ***términos*** con ***factor común***.

Este ***método*** consiste en ***formar grupos***, los más adecuados, para ***factorizar*** cada uno como más convenga en cada caso y lograr finalmente la ***factorización total*** de la ***expresión***.

Ejemplos: **Factorizar**:

1) $5a + 5b + ax + bx$. Agrupando los ***términos*** que tengan algún ***factor común*** se tiene:

$5(a+b) + x(a+b) = (a+b)(5+x)$ o también $a(5+x) + b(5+x) = (a+b)(5+x)$

2) $x^2 + ax + bx + ab = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)(x+b)$

3) $8ax - bx + 8ay - by) = 8a(x+y) - b(x+y) = (x+y)(8a-b)$

4) $ap + ax - 2bx - 2bp = a(p+x) - 2b(p+x) = (p+x)(a-2b)$

5) $$a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = a^2 - (b+c)^2 = (a+b+c)(a-b-c)$$

6) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax - 2by = (a+x)^2 - (y+b)^2 = (a+x+y+b)(a+x-y-b)$

7) $a^2 - ab - b - 1 = (a+1)(a-1) - b(a+1) = (a+1)(a-1-b)$

4. FACTORIZACIÓN DE UN *TRIN0MIO* DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Para **factorizar** el ***trinomio*** $6x^2 - 11x - 35$ se procede de acuerdo al siguiente ***procedimiento***:

Primero. Se buscan ***dos números*** que al ***sumarlos*** nos den el ***coeficiente*** del termino de ***primer grado*** (**- 11**) y que al ***multiplicarlos*** den el ***producto*** del ***coeficiente*** del término de ***segundo grado*** (**6**) por el término ***independiente*** (**- 35**)

Es decir: $m + n = -11$ y $mn = 6(-35) = -210$

Como la ***suma***: $10 + (-21) = -11$ y la ***multiplicación***: $10(-21) = -210$, resulta que: $m = 10$ y $n = -21$.

Segundo. El término de ***primer grado*** (**- 11x**) se descompone como la ***suma*** de **mx + nx**:

$$6x^2 - \mathbf{11x} - 35 = 6x^2 + \mathbf{10x} - \mathbf{21x} - 35$$

Tercero. Se **factoriza** por ***agrupamiento*** la expresión anterior:

$$\mathbf{6x^2} + \mathbf{10x} - \mathbf{21x} - \mathbf{35} = (6x^2 + 10x) + (-21x - 35) =$$
$$= 2x(3x+5) - 7(3x+5) = \mathbf{(3x+5)(2x-7)}$$

Por lo que:

$$\mathbf{6x^2 - 11x - 35 = (3x+5)(2x-7)}$$

Ejemplos.

1) **Factorizar**: $\mathbf{14x^2 + x - 3}$. Siguiendo los pasos descritos:

$\mathbf{m + n = 1}$ y $\mathbf{mn = -42}$. Por lo que: **m = - 6** y **n = 7**.

Entonces:

$$\mathbf{14x^2 + x - 3} = 14x^2 - 6x + 7x - 3 = (14x^2 + 7x) - (6x + 3) =$$
$$= 7x(2x+1) - 3(2x+1) = \mathbf{(2x+1)(7x-3)}$$

2) **Factorizar**: $\mathbf{9x^2 + 6x - 3}$. Siguiendo el procedimiento anterior:

$\mathbf{m + n = 6}$ y $\mathbf{mn = -27}$. Por tanto: **m = -3** y **n = 9**

Entonces:

$$\mathbf{9x^2 + 6x - 3 = 9x^2 - 3x + 9x - 3 = 3x(3x-1) + 3(3x-1) = (3x-1)(3x+3)}$$

3) **Factorizar**: $\mathbf{4x^2 - 24x + 11}$. De acuerdo al procedimiento empleado:

$\mathbf{m + n = -24}$ y $\mathbf{mn = -44}$. Por tanto: **m = - 2** y **n = - 22**

Entonces:

$$\mathbf{4x^2 - 24x + 11 = 4x^2 - 2x - 22x + 11 = 2x(2x-1) - 11(2x-1) = (2x-1)(2x-11)}$$

Para el caso del ***trinomio*** de la forma: $x^2 + bx + c$ en donde el ***coeficiente*** del término al cuadrado vale la ***unidad***, también se procede en la misma forma.

Ejemplos:

1) **Factorizar**: $x^2 - 7x + 12$

$m + n = -7$ y $mn = 12$. Por tanto: $m = -3$ y $n = -4$, entonces:

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x-4)$$

2) **Factorizar**: $a^2 + 13a + 12$

$m + n = 13$ y $mn = 12$. Por tanto: $m = 1$ y $n = 12$

$$a^2 + 13a + 12 = a^2 + a + 12a + 12 = a(a+1) + 12(a+1) = (a+1)(a+12)$$

3) **Factorizar**: $x^2 - 5x - 14$.

$m + n = -5$ y $mn = -14$.Por tanto: $m = +2$ y $n = -7$

$$x^2 - 5x - 14 = x^2 + 2x - 7x - 14 = x(x+2) - 7(x+2) = (x+2)(x-7)$$

5. FACTORIZACIÓN POR *COMPLEMENTACIÓN* DEL *TRINOMIO CUADRADO PERFECTO*.

Algunas veces se puede ***factorizar*** un ***trinomio*** de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, si previamente se ***completa*** con él un ***trinomio cuadrado perfecto***, este naturalmente bajo la hipótesis de que no lo es desde un principio.

Se empieza por sacar como ***factor común*** el ***coeficiente*** de x^2 únicamente en los términos en las que está contenida la literal x. Posteriormente se ***divide*** entre dos al ***coeficiente*** que le haya quedado a x elevado a la primer potencia y a lo que resulta, se eleva al cuadrado, ésta es la ***cantidad*** que debe ***sumarse*** para complementar el ***trinomio cuadrado perfecto*** y ***restarse*** también inmediatamente después, para que no haya alteraciones.

Ejemplos:

1) **Factorizar**: $4x^2 - 24x + 11$.

De acuerdo a lo indicado tenemos: $4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 11$. Los ***tres primeros sumandos*** dentro del paréntesis forman el ***trinomio cuadrado perfecto***. Por lo que:

$$4(x-3)^2 - 36 + 11 = 4(x-3)^2 - 25 = [(2(x-3)]^2 - (5)^2$$

Vemos que es una ***diferencia de cuadrados***.

$$4x^2 - 24x + 11 = [2(x-3)+5][2(x-3)-5] = (2x-6+5)(2x-6-5) = (2x-1)(2x-11)$$

2) **Factorizar**: $9x^2 + 6x - 3$.

$$9x^2 + 6x - 3 = 9\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) - 3 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 1 - 3 = \left[3\left(x + \frac{1}{3}\right)\right]^2 - (2)^2 =$$
$$= \left[3\left(x + \frac{1}{3}\right) + 2\right]\left[3\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2\right] = (3x + 1 + 2)(3x + 1 - 2) =$$
$$= (3x + 3)(3x - 1)$$

3) **Factorizar**: $16x^2 - 48x + 35$

$$16x^2 - 48x + 35 = 16\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 35 = 16\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \left[4\left(x - \frac{3}{2}\right)\right]^2 - 1 =$$
$$= \left[4\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1\right]\left[4\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\right] = (4x - 6 + 1)(4x - 6 - 1) =$$
$$= (4x - 5)(4x - 7)$$

6. RAZONES Y PROPORCIONES

La *razón* es un ***número abstracto*** que expresa sólo la *relación* que hay entre **dos *magnitudes***, por lo que ***carece de unidades***.

La *razón* es una ***fracción*** de dos ***magnitudes*** **a** y **b**, se escribe $\frac{a}{b}$, o bien, **a : b** y se lee: ***a es a b***.

Ejemplos:

1) Sean dos engranes **A** y **B** de **10** y **15** ***dientes*** respectivamente la ***razón*** de **A** a **B** es:

$\frac{10}{15}$, o sea $\frac{2}{3}$, o bien **2:3** que se lee **2** es a **3**.

La ***razón*** de **B** a **A** es. $\frac{15}{10}$, o sea $\frac{3}{2}$, o bien **3:2** que se lee **3** es a **2**.

2) La ***razón*** $\frac{60 \text{ pesos}}{12 \text{ peras}}$ indica que una ***pera*** cuesta $\frac{60}{12} = \$5.00 \text{ pesos}$.

3) En **25** ***aciertos*** de un ***tirador***, en **100** ***disparos***, la ***razón*** es: $\frac{25}{100}$ o $\frac{1}{4}$ o $1:4$

Proporciones.

La ***igualdad*** de ***dos razones*** se llama ***proporción***. Cuando se aplican las ***razones*** a problemas es frecuente encontrar situaciones en que dos ***razones*** son ***iguales***.

De modo que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ representan la misma ***razón***, resulta la ***proporción*** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que también puede escribirse como : **a : b :: c : d** y **a : b = c : d** y se lee "**a** ***es a*** **b** ***como*** **c** ***es a*** **d**".

Las cantidades **a**, **b**, **c** y **d** se llaman ***términos*** de la ***proporción*** y sin importar que expresión se use, se dice que: **a** y **d** son los ***extremos***; **b** y **c** son los ***medios***

Por otra parte se les conoce como: **a** y **c** ***antecedentes*** **b** y **d** ***consecuentes***

Propiedades de las proporciones.

1. En toda ***proporción***, el ***producto*** de los ***extremos*** es igual al ***producto*** de los ***medios***. Las ***razones*** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son ***iguales*** si $ad=bc$, ***propiedad fundamental***.

2. En toda ***proporción***, los ***medios*** se pueden ***intercambiar***. Si tenemos: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ resulta:

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. **(1)**

3. En toda ***proporción***, la ***suma*** de los ***dos primeros términos*** es al ***segundo***, como la ***suma*** de los ***dos últimos*** es al ***cuarto***.

Partiendo de: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. ***Sumándole*** la ***unidad*** a cada ***razón*** tendremos:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \textbf{(2)}$$

4. En toda ***proporción*** la ***diferencia*** de los ***dos primeros términos*** es al ***segundo***, como la ***diferencia*** de los ***dos últimos*** es al ***cuarto***;

Sea la ***proporción***: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. ***Restando*** la ***unidad*** a cada ***razón*** se tiene:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad \textbf{(3)}$$

5. En toda ***proporción***, la ***diferencia*** de los ***dos primeros términos*** es a su ***adición***, como la ***diferencia*** de los ***últimos*** es a su ***adición*** de ellos.

Igualando los ***cocientes*** de los ***miembros*** respectivos de las dos ***proporciones*** anteriores:
Igualando los primeros ***miembros***:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{a+b}{b};\frac{a-b}{a+b}=\frac{b}{b}=1 \quad \therefore \quad \frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}=\mathbf{1} \qquad \textbf{(a)}$$

Igualando los segundos ***miembros***:

$$\frac{c-d}{d}=\frac{c+d}{d};\frac{c-d}{c+d}=\frac{d}{d}=1 \quad \therefore \quad \frac{\mathbf{c-d}}{\mathbf{c+d}}=\mathbf{1} \qquad \textbf{(b)}$$

Igualando **(a)** y **(b)**, nos da: $\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}=\frac{\mathbf{c-d}}{\mathbf{c+d}}$ **(4)**

Para **obtener** el valor de un término ***desconocido*** en una ***proporción***, debemos aplicar la ***propiedad fundamental*** de éstas y **efectuar** las operaciones necesarias.

Ejemplos:

1) **Encuentre** el valor de **x** si: $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{15}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$. Usando la ***propiedad fundamental***, tenemos:

$$\mathbf{5x = 2(15) = 30}$$

Despejando: $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{5}}=\mathbf{6}$

2) **Encontrar** los valores de **a** y **b**, si **a - b = 12**; **c = 3** y **d = 2.** De acuerdo a la ***propiedad*** **(3)**: $\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{c-d}}{\mathbf{d}}$. Sustituyendo:

$$\frac{12}{b}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2};12=\frac{b}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{b}=\mathbf{24}$$

Sabemos que **a - b = 12**. Sustituimos **b**:

$$a-24=12 \quad \therefore \quad \mathbf{a}=12+24=\mathbf{36}$$

Comprobación: Según la propiedad **(1)**:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad ; \quad \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{24}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Variación directamente proporcional.

Dadas dos ***cantidades***, si a un ***aumento*** de una corresponde un ***aumento*** de la otra, o a una ***disminución*** de una corresponde una ***disminución*** de la otra, se dice que dichas ***cantidades*** son ***directamente proporcionales***.

Sean x, y dos cantidades que varían en forma ***directamente proporcional***; si a x_1 le corresponde el valor y_1, y a x_2 le corresponde y_2, se cumple la igualdad:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Para expresar que las cantidades x, y son ***directamente proporcionales***, se escribe; $y \propto x$

De acuerdo con la ***definición***, se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k, es la ***constante*** de ***proporcionalidad***.

Para determinar la ***constante*** de ***proporcionalidad***, basta conocer los valores correspondientes de x e y.

Si y toma el valor y_1; cuando x toma el valor x_1, se tiene:

$$\frac{y_1}{x_1} = k$$

Ejemplo:

Si la ***velocidad*** de un automóvil es ***constante***, la ***distancia*** recorrida y el ***tiempo*** son ***directamente proporcionales***, pues a ***mayor distancia*** recorrida corresponde ***mayor tiempo***, y a ***menor distancia menor tiempo*** Si la ***distancia*** recorrida es de **300 Km** en **4 horas**. ¿Qué ***distancia*** se recorrerá en **7 horas**?.

Representando por x a la ***distancia*** y por t al ***tiempo***, se tiene:

$x_1 = 300$, $t_1 = 4$ y $t_2 = 7$

Como: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Sustituyendo valores tenemos: $\frac{300}{x_2} = \frac{4}{7}$

Despejando: $(300)(7) = 4x_2 \quad \therefore \quad x_2 = \frac{2100}{4} = 525 \text{ km}$

La ***constante*** de ***proporcionalidad*** en este caso está dada por $\frac{x}{t} = k$, para encontrar su valor se sustituye x_1 y t_1, o x_2 y t_2

Para: $x_1 = 300$ y $t_1 = 4$, se tiene: $\frac{300}{4} = k = 75 \text{ km}$, en donde k, es la ***velocidad*** del automóvil.

Variación inversamente proporcional.

Dadas dos ***cantidades*** puede ocurrir, que, a todo ***aumento*** de una, corresponda una ***disminución*** para la otra, o que a toda ***disminución*** de una, corresponda un ***aumento*** para la otra. Entonces se dice que las dos ***cantidades*** son ***inversamente proporcionales***.

Sean **x**, **y** dos ***cantidades*** que varían en forma ***inversamente proporcional***, si a x_1 le corresponde el valor y_1 y a x_2 el valor y_2, se cumple la igualdad:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$$

De acuerdo con la definición se cumple que: **yx = k**, donde **k**, es la ***constante*** de ***proporcionalidad inversa***.

Ejemplo:

Un tren recorre **300 km**, la ***velocidad*** que lleva y el ***tiempo*** empleado en recorrer esa ***distancia***, son cantidades ***inversamente proporcionales***, a mayor ***velocidad*** corresponderá menor ***tiempo***, y a menor ***velocidad*** mayor ***tiempo***.

Si la ***velocidad*** es de **20 km/hr** y ocupa un ***tiempo*** de **15 minutos**. ¿Qué ***velocidad*** lleva si ocupa **4 minutos**?

Utilizando: **v = velocidad** y **t = tiempo**

v_1 = ***velocidad*** correspondiente a t_1 y v_2 = ***velocidad*** correspondiente a t_2.

Tenemos: $\frac{v_1}{v_2}=\frac{t_2}{t_1}$. Sustituyendo: $\frac{20}{v_2}=\frac{4}{15}$; $4v_2=300$

Despejando: $v_2=\frac{300}{4}=75\text{ km/h}$, qué es la ***velocidad*** que lleva el tren al correr en **4 minutos** la ***distancia*** de **300 Km**.

7. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una ***fracción algebraica*** es una ***expresión*** de la forma $\frac{a}{b}$, donde **a** y **b** son ***polinomios***.

Como se observa, la ***fracción algebraica*** es el ***cociente*** de dos ***cantidades*** que, en este caso, son ***polinomios***. **a** es el ***numerador*** o ***dividendo*** y **b** es el ***denominador*** o ***divisor***.

Son ***fracciones algebraicas***:

$$\frac{5x^3}{6x} \quad ; \quad \frac{x^6y}{x^7b} \quad ; \quad -\frac{a^2+2ab^2-b^3}{2b+1}$$

Existen tres ***signos*** asociados en una ***fracción algebraica***: el ***signo*** del ***numerador***, el ***signo*** del ***denominador*** y el ***signo*** resultante de la ***operación*** de la ***fracción***.

Es decir: $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$; $\frac{-c}{d}=\frac{c}{-d}=-\frac{c}{d}$

De lo anterior se observa que se pueden hacer cambios en los ***signos*** de una ***fracción***, sin que ésta se altere.

a) La ***fracción algebraica*** es ***propia*** cuando el ***grado*** del ***numerador*** es ***menor*** que el ***grado*** del ***denominador***.

Ejemplos:

$$\frac{-2}{y-3} \; ; \; \frac{5a^2}{a^3+9} \; ; \; \frac{y^2-4y-8}{y^6-3}$$

b) Una ***fracción algebraica*** es ***impropia*** cuando el ***grado*** del ***numerador*** es ***igual o mayor*** que el ***grado*** del ***denominador***.

Ejemplos:

$$\frac{a^2+4a-4}{a^2-2} \; ; \; \frac{b^5+2}{5b^3-2b^2-3}$$

c) Una ***fracción algebraica*** es ***simple*** cuando el ***numerador*** y el ***denominador*** son **polinomios**.

Ejemplos:

$$\frac{5a^2+2a+1}{x-3} \; ; \; \frac{b^3+5y^2+36}{5b^4+3b^3-b^2+b}$$

d) Una ***fracción*** es ***compuesta*** cuando ***existe***, por lo menos, una ***fracción***, en el ***numerador*** ó.

Ejemplos:

$$\frac{\frac{a+2}{a-1}-1}{\frac{3a+4}{10a}} \; ; \; \frac{\frac{1}{2a-1}-\frac{4a}{a^2+2a}}{6+\frac{5a^3+8a+3}{2a-5}}$$

8. SIMPLIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES.

Se dice que una ***fracción*** esta ***expresada*** en su forma más ***simple***, cuando el ***numerador*** y el ***denominador*** **no** tienen ***factor común***, excepto la ***unidad***.

Esta ***operación*** sólo puede ejecutarse previa ***factorización*** del ***numerador*** y ***denominador*** de una ***fracción***, puesto que en tales condiciones, naturalmente si las hay, pueden suprimirse los ***factores comunes*** del ***numerador*** y ***denominador***. Cuando se hace esto se dice que tales ***factores*** se ***simplifican***, no que se anulan, puesto que toda ***expresión dividida*** entre ***sí misma*** da la ***unidad*** por ***cociente***.

Ejemplos:

1) $$\frac{16a^2b^3}{2a^2b^2}=8b$$

2) $$\frac{2x^2-2x-24}{2x+6}=\frac{2(x^2-x-12)}{2(x+3)}=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4$$

3) $$\frac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}=\frac{6a^2(7a-5m)}{5m^2(7a-5m)}=\frac{6a^2}{5m^2}$$

4) $$\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}=\frac{2a^2x^4(6a+x)}{3b^2x(6a+x)}=\frac{2a^2x^3}{3b^2}$$

5) $$\frac{a^2-2a+1}{a-1}=\frac{(a-1)^2}{a-1}=a-1$$

6) $$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-y}{x+y}$$

7) $$\frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}=\frac{a(c+d)+b(c+d)}{a(a+b)}=\frac{(c+d)(a+b)}{a(a+b)}=\frac{c+d}{a}$$

8) $$\frac{(a+b)^2(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)^2}=\frac{(a+b)^2(a-b)(a^2+ab+b^2)}{[(a+b)(a-b)]^2}=$$
$$=\frac{(a+b)^2(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)^2(a-b)^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$$

9. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las *operaciones* con ***fracciones algebraicas*** se efectúan de la misma forma que en ***aritmética***, pero en ***álgebra*** intervienen ***expresiones*** con ***signos*** y que contienen ***números*** y ***literales***.

1. Suma y resta de fracciones.

Si las ***fracciones*** tienen el mismo ***denominador***, se procede en forma **análoga** a como se efectúa en ***aritmética***, o sea: $\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}$

Ejemplo:

$$\frac{3a}{2xy}+\frac{5a}{2xy}-\frac{c}{2xy}=\frac{3a+5a-c}{2xy}=\frac{8a-c}{2xy}$$

Si los ***denominadores*** de las ***fracciones*** son ***diferentes***, entonces cada ***fracción*** se convierte a una ***fracción equivalente*** con el ***mínimo común múltiplo***, ***m.c.m.***, de los ***denominadores***, como nuevo ***denominador común*** de los ***denominadores***.

Ejemplo:

$$\frac{1}{6x}+\frac{1}{3y}=\frac{y+2x}{6xy}$$

Para efectuar la ***suma*** o ***resta***, se procede como se indica a continuación:

1. Se **simplifican** las ***fracciones*** dadas si es posible

2. Se **obtiene** el ***m.c.m.*** de los ***denominadores***, si son ***diferentes***, éste será el nuevo ***denominador común***.

3. Se **divide** el ***m.c.m.*** entre cada uno de los ***denominadores*** dados y el ***cociente*** se ***multiplica*** por el ***numerador*** correspondiente.

4. Se **agrupan** todos los ***numeradores*** resultantes en una sola ***fracción*** que tiene como ***denominador*** el ***m.c.m.*** encontrado.

5. Se **efectúan** las ***operaciones*** indicadas en el ***numerador*** de la nueva ***fracción***.

6. Se **reducen** ***términos semejantes*** en el ***numerador*** y,

7. Se **simplifica**, la ***fracción*** resultante; si es posible.

Ejemplos:

1) $$\frac{2a}{3}+\frac{3a}{4}+\frac{5a}{6}+\frac{7a}{12}$$

El **12** es el ***denominador común*** y se ***divide*** entre cada uno de los ***denominadores*** para tener:

$$\frac{2a}{3}+\frac{3a}{4}+\frac{5a}{6}+\frac{7a}{12}=\frac{4(2a)+3(3a)+2(5a)+1(7a)}{12}=$$

Efectuando las ***operaciones***: $$=\frac{8a+9a+10a+7a}{12}$$

Reduciendo *términos semejantes*: $$=\frac{34a}{12}$$

Se **simplifica** la ***fracción***: $$=\frac{17a}{6}$$

2) **Procediendo** igualmente para este ejemplo y los siguientes:

$$\frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a-b}}+\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}}=\frac{(a+b)(a+b)+(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=$$
$$=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}=\frac{\mathbf{2(a^2+b^2)}}{\mathbf{a^2-b^2}}$$

3)
$$\frac{\mathbf{2a}}{\mathbf{a+x}}+\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{a-x}}+\frac{\mathbf{3x^2+a^2}}{\mathbf{(a-x)(a+x)}}=\frac{2a(a-x)+3x(a+x)+3x^2+a^2}{(a+x)(a-x)}=$$
$$=\frac{2a^2-2ax+3ax+3x^2+3x^2+a^2}{a^2-x^2}=\frac{\mathbf{3a^2+ax+6x^2}}{\mathbf{a^2-x^2}}$$

4)
$$\mathbf{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x}}+\frac{\mathbf{1+x^2}}{\mathbf{1-x}}=\frac{x(1+x)(1-x)+(1-x)+(1+x^2)(1+x)}{(1+x)(1-x)}=$$
$$=\frac{x(1-x^2)+1-x+1+x+x^2+x^3}{1-x^2}=\frac{x-x^3+2+x^2+x^3}{1-x^2}=\frac{\mathbf{x^2+x+2}}{\mathbf{1-x^2}}$$

5)
$$\frac{\mathbf{13x-5a}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{7x-2a}}{\mathbf{6}}-\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{5}}=\frac{15(13x-5a)-10(7x-2a)-12(3x)}{60}=$$
$$=\frac{195x-75a-70x+20a-36x}{60}=\frac{\mathbf{89x-55a}}{\mathbf{60}}$$

6)
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(a-b)(a-c)}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(a-b)(b-c)}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(a-c)(b-c)}}=\frac{(b-c)-(a-c)+(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$
$$=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\mathbf{0}$$

7)
$$\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{2x-2}}-\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{2x+2}}-\frac{\mathbf{4x}}{\mathbf{x^2-1}}-\frac{\mathbf{x^2+1}}{\mathbf{x^2-1}}=\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}=$$
$$=\frac{(x+1)(x+1)-(x-1)(x-1)-2(4x)+2(x^2+1)}{2(x+1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1-8x+2x^2+2}{2(x^2-1)}=$$
$$=\frac{2x^2-4x+2}{2(x^2-1)}=\frac{2(x^2-2x+1)}{2(x^2-1)}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=$$
$$=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x+1}}$$

2. Multiplicación de fracciones.

La ***multiplicación*** de ***fracciones algebraicas*** se efectúa en la forma ***análoga*** a como se lleva a cabo en ***aritmética*** es decir:

1. Para ***multiplicar*** un ***entero*** por un ***quebrado*** ó un ***quebrado*** por un ***entero***, se ***multiplica*** el

entero por el ***numerador*** y se deja el mismo ***denominador***.

Ejemplo:

$$a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

2. Para ***multiplicar*** entre sí dos ó más ***quebrados*** el ***producto*** de sus ***numeradores*** se ***divide*** entre el ***producto*** de sus ***denominadores***.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$$

Ejemplos:

1) $$\frac{3x}{5z}\frac{4y}{7x}=\frac{3x(4y)}{5z(7x)}=\frac{12xy}{35xz}=\frac{12y}{35z}$$

2) $$\frac{15x-30}{2x}\frac{3x^2}{5x-10}=\frac{3x^2(15x-30)}{2x(5x-10)}=\frac{3x(3)(5x-10)}{2(5x-10)}=\frac{9x}{2}$$

3) $$\frac{a^2-b^2}{a}\frac{1}{a+b}\frac{a}{a-b}=\frac{a(a^2-b^2)}{a(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=1$$

4) $$\frac{a^2x^2}{y^2}\frac{xy}{a(x+y)}\frac{x^2-y^2}{axy}=\frac{a^2x^2xy(x^2-y^2)}{axyy^2a(x+y)}=\frac{x^2(x+y)(x-y)}{y^2(x+y)}=\frac{x^2(x-y)}{y^2}$$

5) $$\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)=\left(\frac{1-x+x^2}{x^3}\right)(x^4+x^3)=\left(\frac{1-x+x^2}{x^3}\right)x^3(x+1)=$$
$$=x+1-x^2-x+x^3+x^2=x^3+1$$

6) $$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x}\right)\frac{1}{x}-1=\left(\frac{1-x+2x(1+x)}{(1+x)(1-x)}\right)\left(\frac{1-x}{x}\right)=\left(\frac{1-x+2x+2x^2}{1+x}\right)\frac{1}{x}=$$
$$=\left(\frac{2x^2+x+1}{1+x}\right)\frac{1}{x}=\frac{2x^2+x+1}{x(1+x)}$$

7) $$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\left(\frac{x^2+1}{x}+1\right)\left(\frac{x^2+1}{x}-1\right)=\left(\frac{x^2+1+x}{x}\right)\left(\frac{x^2+1-x}{x}\right)=$$
$$=\frac{x^4+x^2-x^3+x^2+1-x+x^3+x-x^2}{x^2}=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$$

8) $$\frac{a+x}{(m+n)^3}\frac{x^2-y^2}{12}\frac{(m+n)^2}{m-n}\frac{6(m^2-n^2)}{x+y}=\frac{6(a+x)(x+y)(x-y)(m+n)^2(m+n)(m-n)}{12(m+n)^3(m-n)(x+y)}=$$
$$=\frac{(a+x)(x-y)}{2}$$

3. División de fracciones.

La ***división*** de ***fracciones algebraicas*** se efectúa en la misma forma que en ***aritmética***. Se presentan los siguientes casos.

1. Para ***dividir*** un ***quebrado*** entre un ***entero*** siempre que se puede se ***divide*** el ***numerador*** entre el ***entero*** y se deja el mismo ***denominador***, si no es posible, se ***multiplica*** el ***denominador*** por el ***entero*** y se deja el mismo ***numerador***.

Es decir:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}$$

Ejemplos:

$$\frac{\frac{16}{7}}{8}=\frac{\frac{16}{8}}{7}=\frac{2}{7}\quad;\quad\frac{\frac{5}{9}}{8}=\frac{5}{9x8}=\frac{5}{72}$$

2. Para ***dividir*** un ***entero*** entre un ***quebrado***, se ***multiplica*** el ***entero*** por el ***inverso*** del ***quebrado***.

Lo que podemos representar como: $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

3. Para ***dividir*** un ***quebrado*** entre otro, se ***multiplica*** el ***quebrado dividendo*** por el ***quebrado divisor invertido***.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

1) **Realizar** la siguiente ***división***:

$$\frac{\frac{4a^2}{3b^2}}{\frac{2ax}{9b^3}}=\left(\frac{4a^2}{3b^2}\right)\left(\frac{9b^3}{2ax}\right)=\frac{36a^2b^3}{6axb^2}=\frac{6ab}{x}$$

2) ***Dividir*** $\frac{x^2+4x}{8}$ ***entre*** $\frac{x^2-16}{4}$. Dividiendo:

$$\frac{\frac{x^2+4x}{8}}{\frac{x^2-16}{4}}=\left(\frac{x^2+4x}{8}\right)\left(\frac{4}{x^2-16}\right)=\frac{4(x^2+4x)}{8(x^2-16)}=\frac{4x(x+4)}{8(x+4)(x-4)}=\frac{x}{2(x-4)}$$

3) ***Dividir*** $\frac{\frac{3}{x}}{2x-2}$ ***entre*** $\frac{2x}{x-1}$. Dividiendo:

$$\frac{\frac{\frac{3}{x}}{2x-2}}{\frac{2x}{x-1}}=\frac{\frac{3}{x(2x-2)}}{\frac{2x}{x-1}}=\left(\frac{3}{x(2x-2)}\right)\left(\frac{x-1}{2x}\right)=\frac{3(x-1)}{2x(x-1)2x}=\frac{3}{4x^2}$$

4) ***Dividir*** $\frac{(x+y)^2}{x-y}$ ***entre*** $\frac{x+y}{(x-y)^2}$. Dividiendo:

$$\frac{\frac{(x+y)^2}{x-y}}{\frac{x+y}{(x-y)^2}}=\left(\frac{(x+y)^2}{x-y}\right)\left(\frac{(x-y)^2}{x+y}\right)=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

5) ***Dividir*** $x+\frac{x}{x-1}$ ***entre*** $x-\frac{x}{x-1}$. Dividiendo:

$$\frac{x+\frac{x}{x-1}}{x-\frac{x}{x-1}}=\frac{\frac{x(x-1)+x}{x-1}}{\frac{x(x-1)-x}{x-1}}=\frac{x^2-x+x}{x^2-x-x}=\frac{x^2}{x^2-2x}=\frac{x^2}{x(x-2)}=\frac{x}{x-2}$$

6) ***Dividir*** $\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3}$ ***entre*** $\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}$. Dividiendo:

$$\frac{\dfrac{a^3-x^3}{a^3+x^3}}{\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}}=\left(\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3}\right)\left(\frac{a^2-ax+x^2}{a-x}\right)=\frac{(a^3-x^3)(a^2-ax+x^2)}{(a^3+x^3)(a-x)}=$$

$$=\frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)}{(a+x)(a^2-ax+x^2)(a-x)}=\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}$$

7) ***Dividir*** $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$ ***entre*** $1+\dfrac{a-b}{a+b}$. Dividiendo:

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1+\dfrac{a-b}{a+b}}=\frac{\dfrac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{(a+b)+(a-b)}{a+b}}=\frac{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{a+b+a-b}{a+b}}=$$

$$=\frac{\dfrac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{2a}{a+b}}=\frac{\dfrac{4ab}{a-b}}{2a}=\frac{4ab}{2a(a-b)}=\frac{2b}{a-b}$$