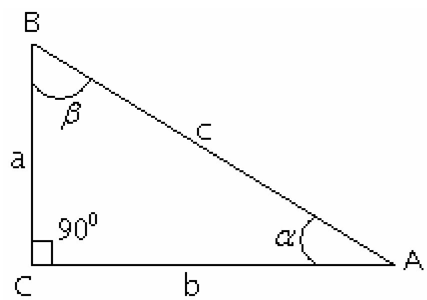
II. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas se utilizan fundamentalmente en la solución de triángulos rectángulos, recordando que todo triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90^0 y sus ángulos interiores suman 180^0. La notación que se acostumbra es la siguiente.



$$\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$$

Tomamos el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$sen\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto \;\; opuesto} = \frac{c}{a}$$

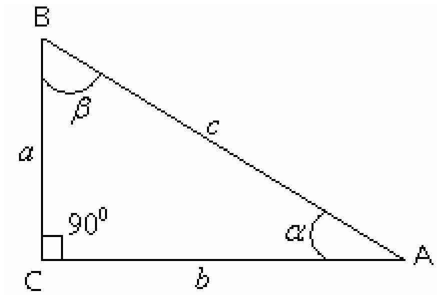
$$\cos\alpha = \frac{cateto \;\; adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto \;\; adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{cateto \;\; adyacente}{cateto \;\; opuesto} = \frac{b}{a}$$

Nota: Véase que las razones $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$ son recíprocas de la $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $sen\alpha$ respectivamente.

2.2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo implica obtener la medida de todos sus ángulos y de todas las longitudes de sus lados. En donde se utilizan las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras fundamentalmente, el cuál se enuncia así: **"en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos".**

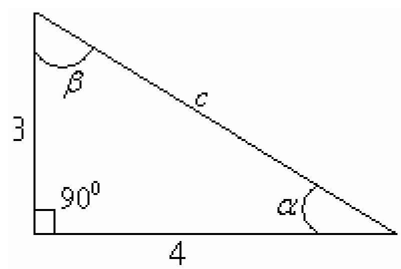


$$c^2 = a^2 + b^2 \ldots(I)$$
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

EJEMPLOS

Determinar los lados y ángulos faltantes en cada caso.

1) Resolver el siguiente triángulo cuando los catetos miden 3 y 4 unidades.



Para obtener la hipotenusa aplicamos el teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$
$$c = 5$$

Para calcular los ángulos α y β, podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\alpha = \tan^{-1} 0.75$$
$$\alpha = 36.87^0$$

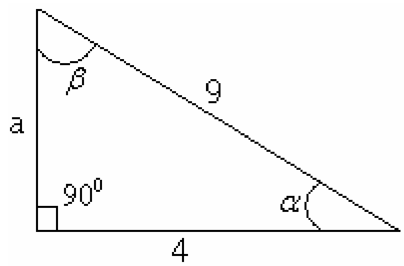
y como $\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$

despejando $\beta = 180^0 - 90^0 - 36.87^0$

$$\beta = 53.13^0$$

por lo tanto $\alpha = 36.87^0$; $\beta = 53.13^0$; $c = 5$

2) Calcular β, α, a



Para obtener β:

$sen\beta = \frac{4}{9}$

$\beta = sen^{-1}\frac{4}{9}$

$\beta = 26.38^0$

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{9^2 - 4^2}$

$a = \sqrt{81 - 16}$

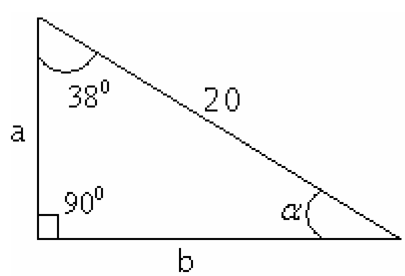
$a = 8.06$

dado que $\alpha + \beta + 90^0 = 180^0$

despejando $\alpha = 180^0 - 26.38^0 - 90^0$

$\alpha = 63.62^0$

3) Calcular a, b, α



$\alpha = 180^0 - 90^0 - 38^0 = 52^0$

Para calcular "a":

$sen52^0 = \frac{a}{20}$

$a = 20sen52^0$

$a = 15.76$

Para calcular "b":

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

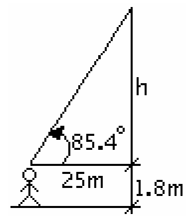
$\cos 52^0 = \frac{b}{20}$

$b = 20\cos 52^0$

$b = 12.31$

4) La torre Eiffel en su base cuadrangular mide 50 metros de lado, ¿cuál es su altura si una persona que mide 1.8 m. de estatura, al mirar la punta mide un ángulo de elevación de 85.4^0 ?

Solución



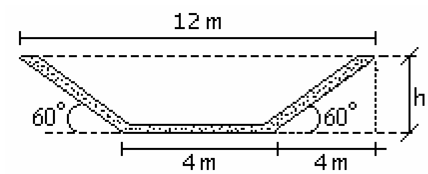
Si $\tan 85.4^0 = \frac{h}{25}$

$$25\tan 85.4^0 = h$$

$$h \cong 310.72\ [m]$$

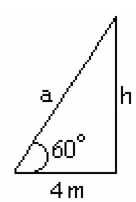
Altura de la torre = $310.72 + 1.8 = 312.52\ [m]$

5) ¿Cuál es el área de un canal trapecial con la geometría que se muestra en la figura?



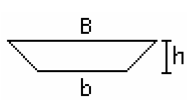
Solución

Determinando cuánto mide la altura "h", el problema se resuelve. Dado que el canal es una figura regular se tiene que:



$$\tan 60^0 = \frac{h}{4} \quad ; \quad 4\tan 60^0 = h$$

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = h \quad ; \quad h \cong 6.93\ [m]$$



El área de un trapecio es "base mayor más base menor entre dos y multiplicado esto por la altura", es decir

$$\frac{B+b}{2}h = Área$$

$$Área = \frac{12+4}{2}(6.93) = 55.44\ [m^2]$$

EJERCICIOS

Resuelva los siguientes triángulos rectángulos:

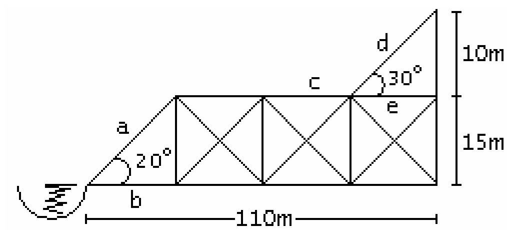
1) Si $b = 2.5$ y $\alpha = 39^0$, encuentre a, c, β

2) Si $a = 4$ y $b = 5$, obtenga c, α, β

3) Un globo aerostático se eleva verticalmente desde el punto P (en el suelo), su ángulo de elevación desde el punto Q (en el suelo también) situado a 250 m del punto P, cambia de 23^0 a 35^0. Determine que tanto se eleva el globo durante este cambio.

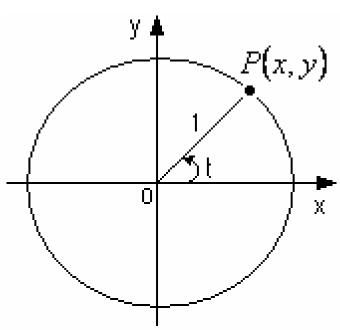
4) El piloto de un avión de Mexicana debe aproximarse a la pista de aterrizaje en el D.F. en un ángulo de 7^0 con respecto a la horizontal. Si vuela a una altitud de 9000m. ¿A qué distancia de la pista debe iniciar su descenso?

5) En la siguiente figura se muestra un diseño de un tobogán, se pide calcular la longitud total del tobogán



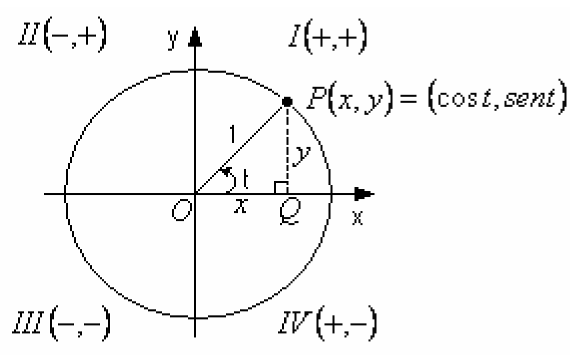
2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CUALQUIER CUADRANTE

Un círculo con centro en el origen de coordenadas y de radio la unidad es llamado **círculo unitario**. Sí sobre este círculo tomamos un punto $P(x, y)$, el radio $\overline{OP}$ genera un ángulo positivo de magnitud "t" radianes como se muestra.



Se conviene que se generan ángulos positivos si son medidos a partir del eje "x" y girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj hasta el radio $\overline{OP}$ como lo marca la flecha y ángulos negativos girando en el sentido de las manecillas del reloj.

Bajando la perpendicular al eje "x" desde el punto P, se tiene el triángulo rectángulo OPQ, donde podemos definir la razones trigonométricas $sent$ y $\cos t$ por ejemplo.



$$sent = \frac{y}{1} \quad ; \quad y = sent$$

$$\cos t = \frac{x}{1} \quad ; \quad x = \cos t$$

Por lo que el punto $P(x, y)$ puede expresarse como $P(\cos t, sent)$ como se muestra en la figura.

Recordando que el plano coordenado bidimensional o plano cartesiano está formado por cuatro regiones llamadas cuadrantes I, II, III y IV, en donde a la localización de puntos en cada cuadrante le corresponde un determinado signo a cada coordenada, por ejemplo en el cuadrante I se localizan puntos cuyas coordenadas son positivas $(+,+)$, en el II cuadrante $(-,+)$, en el III cuadrante $(-,-)$ y en el IV cuadrante $(+,-)$ como se mostró en la figura anterior. Con esta ley de signos en cada cuadrante, podemos determinar el signo de cualquier razón trigonométrica para ángulos en cualquier cuadrante.

Notas:

- Para obtener radianes conociendo grados o viceversa, podemos aplicar la siguiente proporción: $\boxed{\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{x^0}{y}}$

  Para convertir radianes a grados se despeja la "x".
  Para convertir grados a radianes se despeja la "y".

  Por ejemplo: ¿cuántos radianes son $30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0$?

$\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{30^0}{y}$; despejando $y = \dfrac{(30^0)\pi}{180^0} = \dfrac{\pi}{6}$ radianes

$\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{45^0}{y}$; despejando $y = \dfrac{(45^0)\pi}{180^0} = \dfrac{\pi}{4}$ radianes

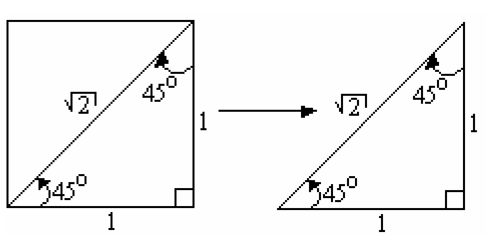
$\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{60^0}{y}$; despejando $y = \dfrac{(60^0)\pi}{180^0} = \dfrac{\pi}{3}$ radianes

$\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{90^0}{y}$; despejando $y = \dfrac{(90^0)\pi}{180^0} = \dfrac{\pi}{2}$ radianes

$\dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{180^0}{y}$; despejando $y = \dfrac{(180^0)\pi}{180^0} = \pi$ radianes

- La construcción de los siguientes triángulos, puede ser una forma de conocer algunas razones trigonométricas que son solicitadas con frecuencia:

  De un cuadrado tenemos:



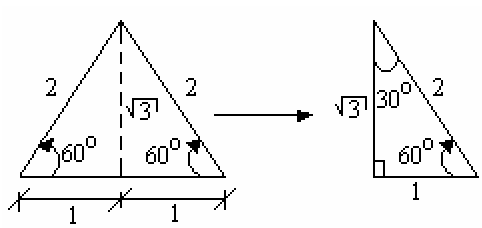
$sen 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^0 = \dfrac{1}{1} = 1$

Por Pitágoras $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

De un triángulo equilátero:



$$sen 30^0 = \frac{1}{2} \qquad sen 60^0 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

- Tener cuidado con el cuadrante que contiene al ángulo solicitado para determinar correctamente el signo de la razón trigonométrica solicitada.

- El conocimiento de la razón trigonométrica del seno de un ángulo es suficiente para determinar las restantes razones con la aplicación previa del teorema de Pitágoras para conocer el lado restante.

- Los valores que toman las razones trigonométricas, se repiten cada 2π radianes, esto significa por ejemplo que el $sen(t+2\pi)=sent$ y $\cos(t+2\pi)=\cos t$, etc., para todo ángulo $t\in\mathbb{R}$, ya que 2π indica una vuelta completa en el círculo unitario.

- Se recomienda tener presente algunas identidades trigonométricas como las que se enlistan a continuación:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=sent$$

$$sen^2 t+\cos^2 t=1 \qquad (identidad \;\; Pitagórica)$$

$$\sec^2 t-\tan^2 t=1 \qquad (identidad \;\; Pitagórica)$$

$$\csc^2 t-\cot^2 t=1 \qquad (identidad \;\; Pitagórica)$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\beta$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha\, sen\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$

$$sen 2\alpha=2sen\alpha\cos\beta$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

EJEMPLOS

1) Determinar las razones trigonométricas $sent, \cos t, \tan t, \cot t, \sec t \;\; y \;\; \csc t$ para los ángulos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

Solución

Ángulo	sen (t)	cos (t)	tan (t)	cot (t)	sec (t)	csc (t)	Cuadrante
0	0	1	0	indefinida	1	indefinida	I
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	I
$\frac{\pi}{2}$	1	0	Indefinida	0	indefinida	1	I
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	II
π	0	-1	0	indefinida	-1	indefinida	II
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	III
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	indefinida	0	indefinida	-1	III
$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	IV
2π	0	1	0	indefinida	1	indefinida	IV

2) Obtenga los valores de las razones trigonométricas seno, tangente y secante para los ángulos $75^0, 150^0, 230^0 \;\; y \;\; 283^0$ aproximando el resultado a 4 cifras decimales.

Solución

Para obtener los valores de las razones trigonométricas cuando el ángulo está dado en grados, puedes hacerlo con tu calculadora científica, usando el MODO en grados (DEG)

Ángulo	sen	tan	sec	Cuadrante
75^0	0.9659	3.7321	3.8637	I
150^0	0.5	-0.5774	-1.1547	II
230^0	-0.7660	1.1918	-1.5557	III
283^0	-0.9744	-4.3315	4.4454	IV

3) Obtenga los valores de las razones trigonométricas coseno, cotangente y cosecante para los siguientes ángulos dados en radianes: $1.2, 2.4536, -0.2731, -4.27 \quad y \quad 0.5731$

Solución

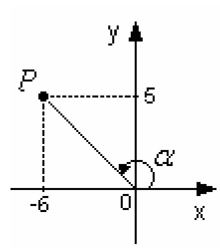
Para obtener los valores de las razones trigonométricas cuando el ángulo dado esta en radianes, puedes hacerlo con tu calculadora científica, usando el MODO en radianes (RAD) o bien usando la fórmula de conversión en grados $(rad)(57.2958) = x^0 (grados)$ y aplicar el MODO en grados (DEG).

Ángulo	cos	cot	csc	Cuadrante
1.2	0.3624	0.3888	1.0729	I
2.4536	-0.7725	-1.2166	1.5748	II
-0.2731	0.9629	-3.5701	-3.7076	IV
-4.27	-0.4281	-0.4737	1.1065	II
0.5731	0.8402	1.5495	1.8442	I

4) Sea α el ángulo generado en el sentido positivo por el segmento de recta $\overline{OP}$ cuyas coordenadas son $O(0,0) \ y \ P(-6,5)$. Encuentre los valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de α.

Solución

Por el Teorema de Pitágoras



$$\overline{OP} = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{61}$$

$$sen\alpha = \frac{5}{\sqrt{61}} = 0.6402$$

$$\cos\alpha = \frac{-6}{\sqrt{61}} = -0.7682 \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{5}{-6} = -0.8333$$

5) Sin usar calculadora encuentre los valores de las siguientes razones trigonométricas:

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right), \ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \ \cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right), \ \cos 210^0, \ \sec 300^0, \ \cot\left(-135^0\right)$$

Solución

Como cada $\frac{1}{6}\pi$ son 30^0 ; $\frac{5}{6}\pi = 150^0$

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)=sen150^0=sen30^0=\frac{1}{2}=0.5$$

Como cada $\frac{1}{3}\pi$ son 60^0 ; $\frac{2}{3}\pi=120^0$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos120^0=-\cos60^0=-\frac{1}{2}=-0.5$$

Como cada $\frac{1}{4}\pi$ son 45^0 ; $-\frac{5}{4}\pi=-225^0$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\cot\left(-225^0\right)=\frac{1}{\tan\left(-225^0\right)}=\frac{1}{-\tan45^0}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\cos\left(210^0\right)=-\cos30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-0.8660$$

$$\sec\left(300^0\right)=\sec\left(60^0\right)=\frac{2}{1}=2$$

$$\cot\left(-135^0\right)=\cot\left(45^0\right)=1$$

EJERCICIOS

1) Determinar las razones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante para los ángulos $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

2) Obtener los valores de las razones trigonométricas coseno, cotangente y cosecante para los ángulos $75^0, 150^0, 230^0, 283^0$

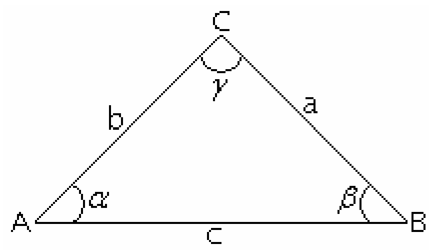
3) Obtenga los valores de las razones trigonométricas seno, tangente y secante para los ángulos $1.2, 2.4536, -0.2731, -4.27, 0.5731$

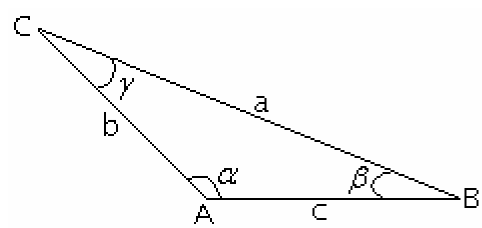
4) Encuentre los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo β generado por el segmento de recta $\overline{OP}$ cuyas coordenadas son $O(0,0)$ y $P(3,-4)$

5) Sin usar calculadora obtenga los valores de las siguientes razones trigonométricas: $\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right), sen\left(\frac{7}{6}\pi\right), \tan\left(315^0\right), \sec\left(-150^0\right), \csc\left(-120^0\right), \cot\left(225^0\right)$

2.4. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Para resolver triángulos que no son rectángulos (que no tienen un ángulo de 90^0) se hace uso de las leyes de los senos y/o de los cosenos. Los triángulos con estas características, se llaman oblicuángulos y pueden tener 3 ángulos agudos o dos ángulos agudos y uno obtuso como se muestra:





Resolver un triángulo significa obtener las longitudes de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos. Para lograr esto, es necesario conocer (datos) al menos tres elementos del triángulo y uno de ellos debe ser un lado (L), recordando también por geometría elemental que la suma de sus ángulos internos es 180^0 ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$).

Las combinaciones de datos pueden ser:

1. Conocer dos ángulos y un lado (AAL).

2. Conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

3. Conocer dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL).

4. Conocer tres lados (LLL).

<u>Ley de los senos:</u> "Dos lados cualesquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

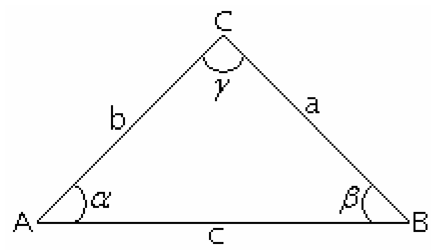
Se acostumbra escribir como $\boxed{\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}}$

<u>Ley de los cosenos:</u> "El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman".

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

EJEMPLOS

Es importante saber que ley debemos aplicar en la solución de un triángulo, en los casos (AAL) y (LLA) donde "A" es opuesto a uno de los lados "L", se recomienda la aplicación de la ley de los senos y en los casos (LAL) donde el ángulo "A" esta comprendido entre los dos lados "L" y en el caso (LLL), se recomienda la aplicación de la ley de los cosenos y recuerda como hemos representado esquemáticamente el triángulo:



1) Resuelva el triángulo $\alpha = 60^0$, $\beta = 40^0$, $b = 4$

Solución

Caso (AAL). Como $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$; $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 100^0 = \underline{80^0}$

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \text{ y } \frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma}$$

$$a = \frac{bsen\alpha}{sen\beta} = \frac{4(sen60^0)}{sen40^0} = \underline{5.39} \; ; \; c = \frac{asen\gamma}{sen\alpha} = \frac{5.39(sen80^0)}{sen60^0} = \underline{6.13}$$

2) Resuelva el triángulo $a = 2$, $b = 3$, $\beta = 40^0$

Solución

Caso (LLA). Con "A" opuesto a un "L":

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \; ; \; \frac{2}{sen\alpha} = \frac{3}{sen40^0} \; ; \; sen\alpha = \frac{2sen40^0}{3}$$

$sen\alpha = 0.4285$; $\underline{\alpha = 25.37^0}$, dado que $\alpha + \beta = 25.37^0 + 40^0 = 65.37^0$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 65.37^0 = \underline{114.63^0}$$

El lado "c" puede calcularse con:

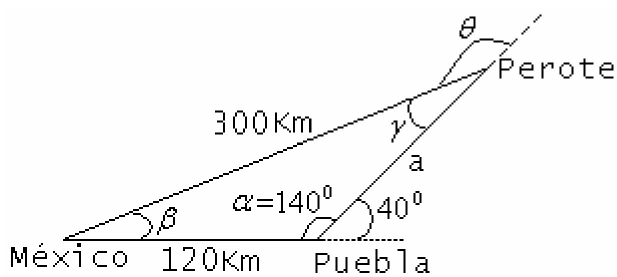
$$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha} \;;\; \frac{c}{sen114.63^0} = \frac{2}{sen25.37^0}$$

$$c = \frac{2sen114.63^0}{sen25.37^0} = \underline{4.24}$$

3) Un avión vuela de la Ciudad de México a Puebla de los Angeles, que está a 120 Km de distancia, luego cambia su dirección 40^0 y se dirige a la Ciudad de Perote como se muestra en la figura.

a) Si la distancia entre México y Perote es de 300 Km ¿Qué distancia hay de Puebla a Perote?
b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto para volver a la Ciudad de México?

<u>Solución</u>



a) Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{300}{sen140^0} = \frac{120}{sen\gamma} \;;\; sen\gamma = \frac{120sen140^0}{300} = 0.2571$$

$$\gamma = sen^{-1}(0.2571) = \underline{14.9^0}$$

Y como $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 154.9^0 = \underline{25.1^0}$

La distancia entre Puebla y Perote la podemos calcular sabiendo que:

$$\frac{a}{sen\beta} = \frac{120}{sen\gamma}$$

Despejando $a = \frac{120sen\beta}{sen\gamma} = \frac{120sen25.1^0}{sen14.9^0} = \underline{198\ Km}$

b) El ángulo que debe girar el piloto para volver a la Ciudad de México es $\theta = 180^0 - \gamma = 180^0 - 14.9^0 = \underline{165.1^0}$

4) Resolver el triángulo $a = 3$, $b = 2$, $\gamma = 50^0$

<u>Solución</u>

Caso (LAL). Aplicando la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2)\cos 50^0$$

$$c^2 = 9 + 4 - 12\cos 50^0 = 13 - 12(0.64)$$

$$c^2 = 5.32$$

$$c = \sqrt{5.32} = \underline{2.31}$$

Una vez conocido el tercer lado, podemos decidir aplicar la ley de senos o de cosenos para completar la solución del triángulo.

Para α : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\cos\alpha = \frac{4 + 5.32 - 9}{2(2)(2.31)} = 0.0346 \;;\; \alpha = \cos^{-1} 0.0346 = \underline{88.02^0}$$

Y como $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - 138.02^0 = \underline{41.98^0}$

5) Resolver el triángulo $a = 3$, $b = 6$, $c = 4$

<u>Solución</u>

Caso (LLL). Aplicando la ley de los cosenos para α :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, despejando $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Sustituyendo valores: $\cos\alpha = \dfrac{(6)^2 + (4)^2 - (3)^2}{2(6)(4)} = 0.9$

$$\alpha = \cos^{-1} 0.9 = \underline{25.8^0}$$

Una vez conocido uno de los ángulos, podemos optar por aplicar la ley de senos o de cosenos para completar la solución del triángulo.

$$\text{Para } \beta: \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \;;\; \frac{3}{sen25.8^0} = \frac{6}{sen\beta}$$

$$\text{Despejando } sen\beta = \frac{6sen25.8^0}{3} = 0.87$$

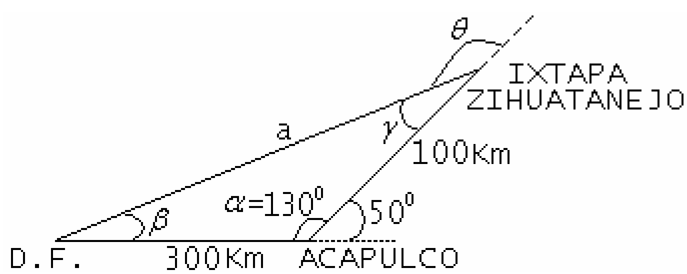
$$\beta = sen^{-1}0.87 = \underline{60.5^0}$$

$$\text{Y como } \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 86.3^0 = \underline{93.7^0}$$

6) Un avión vuela una distancia de 300Km del D.F. al puerto de Acapulco, luego cambia su rumbo 50^0 y se dirige a Ixtapa Zihuatanejo que está a 100Km según la figura.

a) ¿Qué tan lejos está el D.F. de Ixtapa Zihuatanejo?
b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto en Ixtapa Zihuatanejo para regresar al D.F.?

Solución



a) Aplicando la ley de los cosenos $a^2 = (300)^2 + (100)^2 - 2(300)(100)\cos 130^0$

$$a^2 = 90000 + 10000 - 60000(-0.643) = 138580$$

$$a = \sqrt{138580} = \underline{372.26\ Km}$$

b) Aplicando la ley de los senos $\dfrac{300}{sen\gamma} = \dfrac{372.26}{sen130^0}$

despejando $sen\gamma = \dfrac{300sen130^0}{372.26} = 0.62$; $\gamma = sen^{-1}0.62 = 38.3^0$

y como $\theta = 180^0 - \gamma = 180^0 - 38.3^0 = \underline{141.7^0}$

EJERCICIOS

Resolver cada triángulo con la información dada:

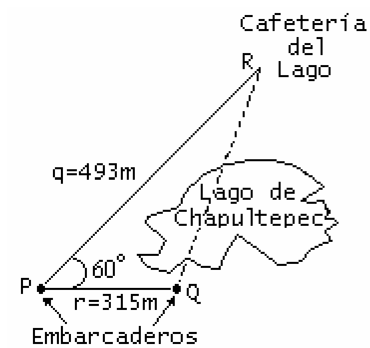
1) $a = 3.1, \quad \alpha = 39^0, \quad \beta = 63^0$

2) $a = 42, \quad b = 23, \quad \alpha = 31.33^0$

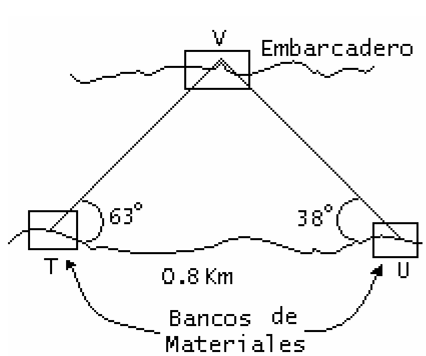
3) $a = 14.1, \quad b = 21.2, \quad \gamma = 58.75^0$

4) $a = 23, \quad b = 34, \quad c = 29$

5) En el lago de Chapultepec se localizan dos embarcaderos, el P y el Q cuya distancia entre ellos es de 315 metros, desde el embarcadero P girando un ángulo de 60^0 se tiene una distancia de 493 m hasta la cafetería del lago R, según se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia desde el embarcadero Q hasta la cafetería del lago R?



6) Sobre el margen de un río se localizan dos bancos de materiales T y U separados uno del otro 0.8 Km. y en la otra margen del río se localizó un sitio V en donde se construirá un embarcadero. Los ángulos VTU y VUT miden 63^0 y 38^0 respectivamente, se desea determinar de que banco de materiales resultará más conveniente traer el material por su cercanía.



2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Recordemos que la gráfica de una función inyectiva $y = f(x)$ y de su inversa $y = f^{-1}(x)$, tienen la característica de que si (a,b) es un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces el punto de coordenadas (b,a) es un punto de la gráfica de su inversa $y = f^{-1}(x)$ y que estos puntos (a,b) y (b,a) están situados simétricamente respecto a la gráfica de la recta $y = x$, esto es, que la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ es una reflexión de la gráfica de la función $y = f(x)$ respecto de la recta $y = x$.

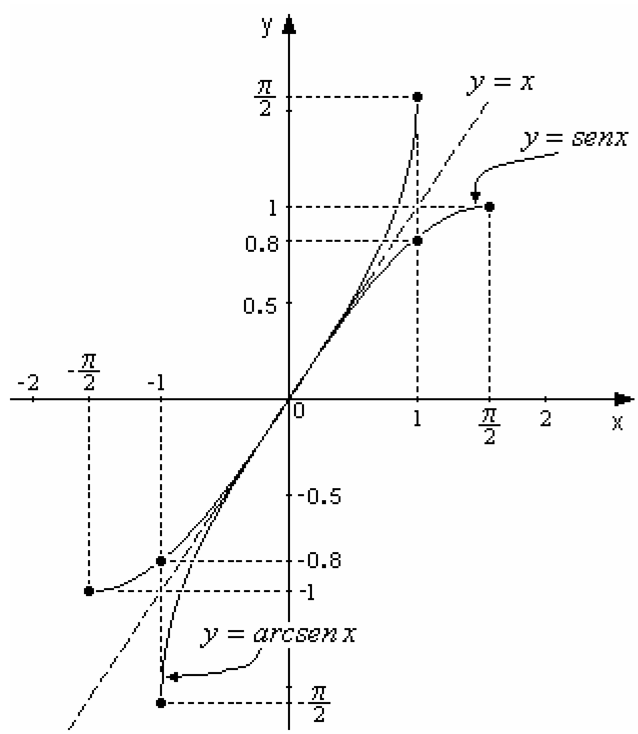
Pero resulta que como ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, es necesario restringir su dominio para hacerlas inyectivas y poder definir su inversa como función.

EJEMPLOS

1) En la función $y = senx$, su dominio y su rango son $D = (-\infty, \infty)$ (todos los reales) y $R = [-1,1]$ (los reales entre -1 y 1 inclusive), para que la inversa de esta función sea también una función, es necesario restringir su dominio a $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ conservando su rango $R = [-1,1]$ y definiendo la inversa como $y = arcsen(x)$, se lee "función arco-seno de x" o también como $y = sen^{-1}(x)$, se lee "función seno inverso de x", cuyas gráficas son:

x	senx
$-\frac{\pi}{2} = -90^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{3} = -60^0$	-0.87
$-\frac{\pi}{4} = -45^0$	-0.71
$-\frac{\pi}{6} = -30^0$	-0.50
$\frac{\pi}{6} = 30^0$	0.50
$\frac{\pi}{4} = 45^0$	0.71
$\frac{\pi}{3} = 60^0$	0.87
$\frac{\pi}{2} = 90^0$	1.00

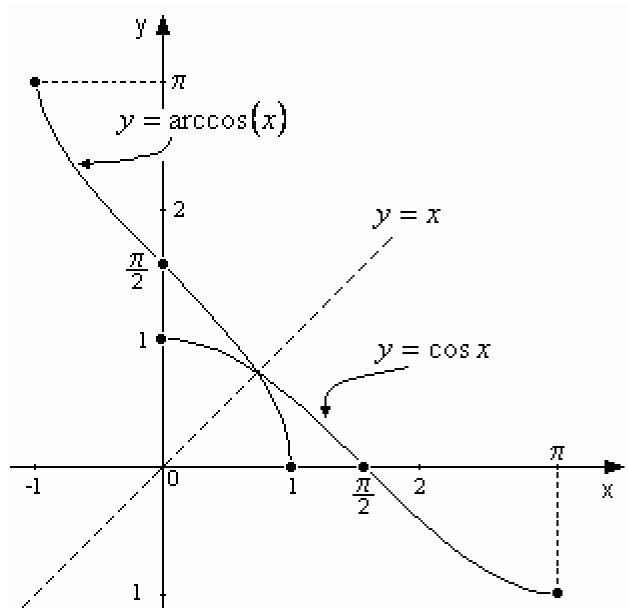
x	$sen^{-1}x$
-1.00	$-\frac{\pi}{2} = -1.57$
-0.87	$-\frac{\pi}{3} = -1.05$
-0.71	$-\frac{\pi}{4} = -0.79$
-0.50	$-\frac{\pi}{6} = -0.52$
0.50	$\frac{\pi}{6} = 0.52$
0.71	$\frac{\pi}{4} = 0.79$
0.87	$\frac{\pi}{3} = 1.05$
1.00	$\frac{\pi}{2} = 1.57$



2) Si la función $y=\cos x$ tiene dominio $D=(-\infty,\infty)$ y rango $R=[-1,1]$, para que su inversa sea una función, es necesario restringir su dominio a $D=[0,\pi]$, conservando su rango $R=[-1,1]$. Su inversa se define como $y=\arccos(x)$, se lee "función arco-coseno de x" o también como $y=\cos^{-1}(x)$, se lee "función coseno inverso de x", cuyas gráficas son:

x	cosx
0.00	1.00
$\frac{\pi}{6}=30^0$	0.87
$\frac{\pi}{4}=45^0$	0.71
$\frac{\pi}{3}=60^0$	0.50
$\frac{\pi}{2}=90^0$	0.00
$\frac{2\pi}{3}=120^0$	-0.50
$\pi=180^0$	-1.00

x	$\cos^{-1}x$
1.00	0.00
0.87	$\frac{\pi}{6}=0.52$
0.71	$\frac{\pi}{4}=0.79$
0.50	$\frac{\pi}{3}=1.05$
0.00	$\frac{\pi}{2}=1.57$
-0.50	$\frac{2\pi}{3}=2.09$
-1.00	$\pi=3.14$



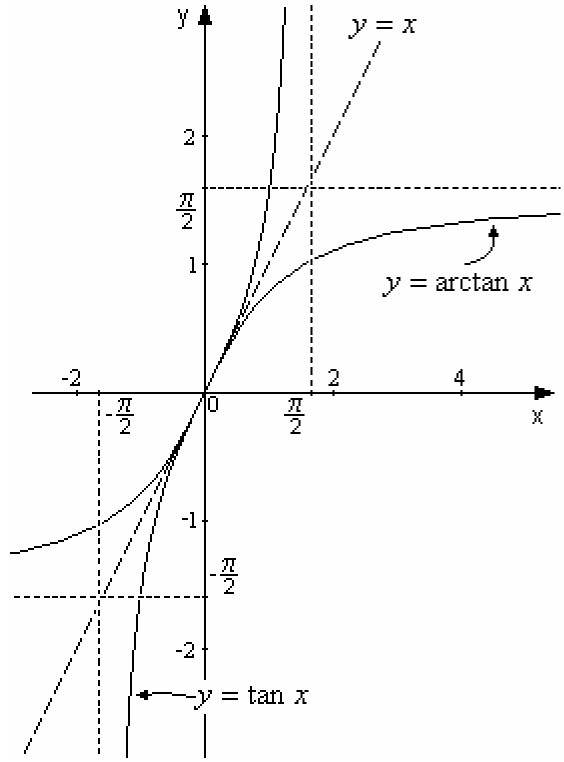
Nota:

- Se hace la aclaración de que la notación $y=sen^{-1}(x)$ ó $y=\cos^{-1}(x)$, el exponente a la menos uno en cualquier función trigonométrica es solo una manera de denotar la inversa, es decir: $sen^{-1}(x)\neq\frac{1}{senx}$. Se propone la notación $arcsen(x),\ \arccos(x),\ldots$ para evitar el exponente (-1).

3) La función $y=\tan x$ tiene dominio los números reales con excepción de los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, o sea: $D=\mathbb{R}-\left\{x \middle| x=\pm(2n-1)\frac{\pi}{2},\, n\in\mathbb{N}\right\}$ y su rango todos los reales $R=(-\infty,\infty)$. Su inversa será función restringiendo su dominio a $D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, conservando su rango $R=(-\infty,\infty)$, cuyas gráficas son:

x	tanx
$-\frac{\pi}{3}=-60^0$	-1.73
$-\frac{\pi}{4}=-45^0$	-1.00
$-\frac{\pi}{6}=-30^0$	-0.58
$\frac{\pi}{6}=30^0$	0.58
$\frac{\pi}{4}=45^0$	1.00
$\frac{\pi}{3}=60^0$	1.73

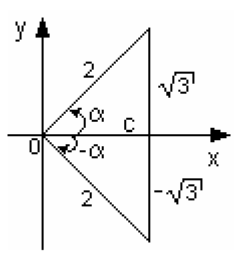
x	$\tan^{-1}x$
-1.73	$-\frac{\pi}{3}=-1.05$
-1.00	$-\frac{\pi}{4}=-0.79$
-0.58	$-\frac{\pi}{6}=-0.52$
0.58	$\frac{\pi}{6}=0.52$
1.00	$\frac{\pi}{4}=0.79$
1.73	$\frac{\pi}{3}=1.05$



4) Determinar el valor de la función $sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

<u>Solución</u>

Sea $\alpha = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, entonces se busca un ángulo α comprendido en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ ó lo que es lo mismo, entre $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$, esto es: $sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lo cual resulta que α debe estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (ver figura) pues $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es una razón positiva, luego el único ángulo dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es $\alpha = 60^0 = \frac{\pi}{3}$



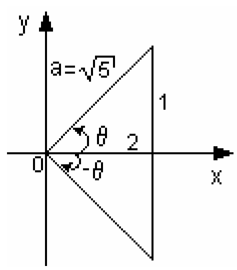
Por el Teorema de Pitágoras

$$c = \sqrt{(2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$$

5) Obtener el valor de la expresión $sen\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$:

Solución

Si $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, donde este ángulo "θ" debe estar dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y como la razón $\frac{1}{2}$ es positiva entonces "θ" debe estar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (ver figura), por lo tanto $sen\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = sen\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$



Por el Teorema de Pitágoras

$a = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

EJERCICIOS

Obtenga las gráficas de las funciones:

1) $y = \cot(x)$ y de su inversa $y = \cot^{-1}(x)$

2) $y = \sec(x)$ y de su inversa $y = \sec^{-1}(x)$

3) $y = \csc(x)$ y de su inversa $y = \csc^{-1}(x)$

4) Encuentre el valor de la expresión $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

5) Obtenga el valor de $\tan\left[sen^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$