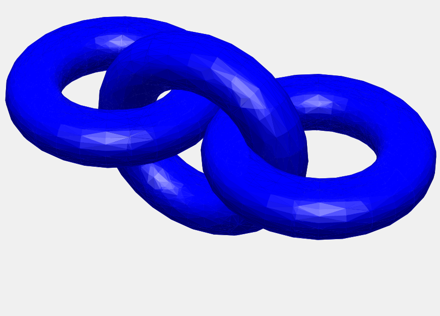
MathCon

The Mathematics Firm

Sistemas de ecuaciones lineales



Índice general

1

Sistemas de ecuaciones lineales

En este documento estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales 2×2, es decir, de dos ecuaciones y dos incógnitas. Estos sistemas tienen la siguiente forma:

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

El problema a resolver es encontrar el valor de las incógnitas x, y tales que las dos ecuaciones sean verdaderas.

En un sistema de ecuaciones lineales siempre tenemos solo uno de los tres casos siguientes:

1. El sistema tiene una única solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene más de una solución (infinidad de soluciones).

Los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales se verán a continuación, sin embargo, todos ellos nos deben de dar la misma solución.

Antes de revisar los métodos podemos mencionar un criterio que nos permitirá saber si el sistema tiene ó no, una única solución:

Solución única

El sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \end{array}$$

tiene una única solución si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, y

1. a_{11}, a_{12}, b_1 son múltiplos de a_{21}, a_{22}, b_2, respectivamente. Entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones.
2. a_{11}, a_{12} son múltiplos de a_{21}, a_{22} respectivamente, pero b_1 no lo es de b_2. Entonces el sistema no tiene solución.

3

Ejemplos:

Ejemplo 1 Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 3x - y & = & -1 \end{array}$$

como $(2)(-1) - (3)(3) = -2 - 9 = -11 \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 2 Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & 4 \\ 6x - 2y & = & 2 \end{array}$$

como $(3)(-2) - (6)(4) = -6 - 24 = -30 \neq 0$, entonces el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 3 Consideremos el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 6 \\ 4x + 2y & = & 1 \end{array}$$

como $(2)(2)-(4)(1) = 4-4 = 0$, entonces el sistema NO tiene una única solución, pero como $4x + 2y$ es el doble de $2x + y$, pero 1 no es el doble de 6, el sistema NO tiene solución.

Ejemplo 4 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 2 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$$

como $(3)(-1) - (-3)(1) = -3 + 3 = 0$, entonces el sistema no tiene una única solución. Y como la primera ecuación es el triple de la segunda, pero 2 no es el triple de 5. Tenemos que el sistema no tiene solución.

Ejemplo 5 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y &= -3 \\ \frac{3}{2}x + y &= -1 \end{aligned}$$

como $(\frac{1}{2})(1) - (\frac{1}{3})(\frac{3}{2}) = 0$, entonces el sistema NO tiene una única solución. Y como la segunda ecuación es el triple de la primera, incluyendo la constante, por lo tanto el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

2

Método de sustitución

El método de sustitución trabaja de la siguiente manera:

1. De la primera ecuación se despeja una incógnita, digamos x.
2. Se sustituye la incógnita despejada en la segunda ecuación.
3. Se reduce la segunda ecuación, y se encuentra el valor de y.
4. Finalmente se sustituye el valor de y, en la ecuación del paso 1, y se encuentra x.

Es posible cambiar de incógnita.

Ejemplos:

Ejemplo 2.1

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de la primera ecuación a x, entonces $x = 1 - y$.

Paso 2 Sustituimos a $x = 1 - y$, en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ (1 - y) - y &= 1 \end{aligned}$$

Paso 3 Reducimos la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} (1-y)-y &= 1 \\ 1-2y &= 1 \\ 1-1 &= 2y \\ 0 &= 2y \end{aligned}$$

de donde $y = 0$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y = 0$, en la ecuación del paso 1, $x = 1-y$. Entonces $x = 1-(0) = 1$.

Paso 5 Por tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x+y &= 3 \\ 3x+2y &= 2 \end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de la primera ecuación a x, entonces $x = \dfrac{3-y}{2}$.

Paso 2 Sustituimos a $x = \dfrac{3-y}{2}$, en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 3x+2y &= 2 \\ 3(\frac{3-y}{2})+2y &= 2 \end{aligned}$$

Paso 3 Reducimos la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
3(\frac{3-y}{2})+2y &= 2\\
\frac{9}{2}-\frac{3}{2}y+2y &= 2\\
\frac{9}{2}+\frac{1}{2}y &= 2\\
\frac{1}{2}y &= 2-\frac{9}{2}\\
\frac{1}{2}y &= -\frac{5}{2}\\
y &= -5
\end{aligned}$$

de donde $y=-5$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y=-5$, en la ecuación del paso 1, $x=\dfrac{3-y}{2}$. Entonces $x=\dfrac{3-(-5)}{2}=\dfrac{8}{2}=4$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}
x &= 4\\
y &= -5
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.3

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}
x-y &= -1\\
2x-3y &= 5
\end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de la primera ecuación a x, entonces $x=y-1$.

Paso 2 Sustituimos a $x=y-1$, en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
2x-3y &= 5\\
2(y-1)-3y &= 5
\end{aligned}$$

Paso 3 Reducimos la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 2(y-1)-3y &= 5 \\ 2y-2-3y &= 5 \\ -y &= 5+2 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

de donde $y = -7$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y = -7$, en la ecuación del paso 1, $x = y - 1$. Entonces $x = (-7) - 1 = -8$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= -8 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

3

Método de igualación

El método de igualación trabaja de la siguiente manera:

1. Despejamos de ambas ecuaciones una incógnita, digamos x.
2. Igualamos ambos despejes.
3. Despejamos, entonces a y de la ecuación obtenida del paso anterior.
4. Obtenemos a x, al sustituir y, en cualquier ecuación obtenida del paso 1.

Ejemplos:

Ejemplo 3.1

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de ambas ecuaciones a x, entonces:

$$\begin{aligned} x &= 1 - y \\ x &= 1 + y \end{aligned}$$

Paso 2 Igualamos ambas ecuaciones del paso anterior: $1 - y = 1 + y$.

Paso 3 Despejamos a y de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} 1-y &= 1+y \\ 0 &= 2y \end{aligned}$$

de donde $y=0$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y=0$, en cualquier ecuación del paso 1, $x=1-y$. Entonces $x=1-(0)=1$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x+y &= 3 \\ 3x+2y &= 2 \end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de ambas ecuaciones a x, entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3-y}{2} \\ x &= \frac{2-2y}{3} \end{aligned}$$

Paso 2 Igualamos ambas ecuaciones del paso anterior: $\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{2-2y}{3}$.

Paso 3 Despejamos a y de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\frac{3-y}{2} &= \frac{2-2y}{3}\\ 3(3-y) &= 2(2-2y)\\ 9-3y &= 4-4y\\ 9-4 &= -4y+3y\\ 5 &= -y\end{aligned}$$

de donde $y=-5$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y=-5$, en cualquier la ecuación del paso 1, $x=\frac{3-y}{2}$. Entonces $x=\frac{3-(-5)}{2}=\frac{8}{2}=4$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}x &= 4\\ y &= -5\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3

Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x-y &= -1\\ 2x-3y &= 5\end{aligned}$$

Paso 1 Despejamos de ambas ecuación a x, entonces:

$$\begin{aligned}x &= y-1\\ x &= \frac{5+3y}{2}\end{aligned}$$

Paso 2 Igualamos ambas ecuaciones del paso anterior: $y-1=\frac{5+3y}{2}$

Paso 3 Despejamos a y de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{5+3y}{2} \\ 2y-2 &= 5+3y \\ -2-5 &= 3y-2y \\ -7 &= y \end{aligned}$$

de donde $y=-7$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $y=-7$, en cualquier ecuación del paso 1, $x=y-1$. Entonces $x=(-7)-1=-8$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= -8 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

4

Método de eliminación

El método de igualación trabaja de la siguiente manera:

1. Se observan las ecuaciones, si tenemos los "mismos"$x, (y)$ en la primera que en la segunda con signo contrario, si no, entonces buscamos un número real tal que al multiplicar una ecuación por ese número r obtengamos los mismos $x, (y)$ en ambas ecuaciones con signo contrario.
2. **Observación:** si multiplicamos una ecuación por un número real r, la solución del sistema no cambia.
3. Posteriormente sumamos ambas ecuaciones, y así reducimos nuestro sistema a una sola ecuación con x ó y.
4. Despejamos ese x ó y, y sustituimos en cualquier ecuación del sistema para obtener el y ó x restante.

Ejemplos:

Ejemplo 4.1

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Paso 1 Obsérvese que tenemos en ambas ecuaciones a las mismas y con signo contrario, por lo tanto, si sumamos ambas ecuaciones tenemos: $2x = 2$, por lo tanto $x = 1$.

Paso 2 Sustituimos a $x = 1$, en cualquier ecuación del sistema: $(1) + y = 1$, entonces $y = 0$.

Paso 3 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Paso 1 Obsérvese que tenemos en ambas ecuaciones a y, y $2y$ por lo tanto, si multiplicamos a la primera ecuación por -2, obtenemos:

$$\begin{aligned} -4x - 2y &= -6 \\ 3x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Paso 2 Sumando ambas ecuaciones del paso anterior obtenemos: $-x = -4$, entonces $x = 4$.

Paso 4 Ahora, sustituimos el valor de $x = 4$, en cualquier la ecuación del paso 1, $2(4) + y = 3$, obtenemos que $y = 3 - 8 = -5$.

Paso 5 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Paso 1 Obsérvese que tenemos en ambas ecuaciones a x, y $2x$ por lo tanto, si multiplicamos a la primera ecuación por -2, obtenemos:

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 2 \\ 2x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Paso 2 Sumando ambas ecuaciones del paso anterior obtenemos: $2y - 3y = 2 + 7$, entonces $y = -7$.

Paso 3 Ahora, sustituimos el valor de $y = -7$, en cualquier ecuación del paso 1, $x = y - 1$. Entonces $x = (-7) - 1 = -8$.

Paso 4 Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= -8 \\ y &= -7 \end{aligned}$$

5
Conclusión

De los ejemplos anteriores podemos concluir que los tres métodos para obtener la solución a un sistema de ecuaciones 2×2, dan el mismo resultado. También podemos concluir que el método "más" eficiente es el tercero, el método de eliminación. Este método se puede generalizar para sistemas de ecuaciones más grandes, de hecho es el método más usado para dar solución a sistemas de ecuaciones lineales con n ecuaciones y m incógnitas éste lleva el nombre de **método de Gauss**.