REGLA DE RUFFINI. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Si en una división de polinomios el divisor es de la forma ***(x - a)*** se puede aplicar la regla de Ruffini para obtener el cociente y el resto de la división.

Ejemplo de la regla de Ruffini

$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

1) Escribimos los coeficientes de los términos del dividendo ordenados de forma decreciente. Añadimos un 0 en el lugar correspondiente de cada término que falte (si es que falta).

+1 -3 +3 -1

2) Escribimos como divisor el número ***- a*** (cambiamos de signo el término independiente del divisor).

(x - a) = (x + 2) , es decir, a = -2

3) Siempre se baja el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

4) Se multiplica -2 por 1, obteniendo como resultado -2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

5) Sumamos -3 y -2, obteniendo -5 como segundo coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & -5 & & \end{array}$$

6) Volvemos a multiplicar -2 por el resultado de la suma algebraica (-5).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & 10 & \\ \hline & 1 & -5 & & \end{array}$$

7) Y así sucesivamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & 10 & \\ \hline & 1 & -5 & 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & 10 & -26 \\ \hline & 1 & -5 & 13 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & 10 & -26 \\ \hline & 1 & -5 & 13 & \boxed{-27} \end{array}$$

Los primeros números que aparecen en la fila de resultados corresponden a **los coeficientes del cociente, y** el último número es **el resto.**

El polinomio cociente es siempre un grado menor que el dividendo.

Cociente: $\mathbf{x^2 - 5x + 13}$

Resto: **-27**

TEOREMAS DEL RESTO Y DEL FACTOR

El resto de la división de un polinomio P(x) por (x - a) es igual al valor numérico de dicho polinomio en $x = a$ (cuidado con el signo).

ejemplo: *"Haya el resto de la división del polinomio* $P(x) = x^3 - 5x^2 - x - 1$ *entre* $(x - 2)$ *".*

a) Utilizando la definición del valor numérico.

$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 2 - 1 = 8 - 20 - 2 - 1 = -15$

b) Haciendo la división.

$(x^3 - 5x^2 - x - 1) : (x - 2)$

Para dividir entre (x - 2), utilizamos la regla de Ruffini.

	1	-5	-1	-1
2		2	-6	-14
	1	-3	-7	-15

Un polinomio P(x) tiene como factor ***(x - a)*** , o se dice que es divisible por el binomio ***(x - a)*** , si el valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ es cero. Al número ***"a"*** se le llama **raíz del polinomio P(x).**

ejemplo: *Comprueba si* ***-1*** *y* ***3*** *son raices del polinomio* $P(x) = x^3 - 27$ *y factoriza dicho polinomio.*

$P(-1) = (-1)^3 - 27 = -28$ *-1* ***no es raiz*** *de P(x)*

$P(3) = 3^3 - 27 = 0$ *3* ***si es raiz*** *de P(x), por tanto (x – 3)* ***es un factor*** *de P(x)*

	1	0	0	−27
3		3	9	27
	1	3	9	0

De esta forma se cumple que:

$P(x) = x^3 - 27 = \mathbf{(x - 3)} \cdot (x^2 + 3x + 9)$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de polinomios del menor grado posible.

Métodos para factorizar un polinomio

1) **Sacar factor común** (si es que se puede)**.** *Ejem:* $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - x = x\,(3x^2 + 5x - 1)$
   A continuación seguiríamos con el polinomio de grado 2 que está multiplicando a *x*.
2) **Calcular las raíces del polinomio y realiza su descomposición factorial**

Vamos a probar con $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

No es posible sacar factor común así que vamos a buscar las raíces enteras del polinomio. Para ello buscamos entre los divisores del término independiente. Para ello utilizamos reiteradamente la regla de Ruffini o el teorema del resto (en ambos casos buscamos que el resto sea 0)

Div(9) = {1, -1, 3, -3, 9, -9} Probamos sucesivamente cuales son raíces entre todos los divisores de 9.

- Empezamos con x = 9

Observamos que x = 9 no es raiz de P(x).

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ 9 & & 9 & 81 & 639 & 5751 \\ \hline & 1 & 9 & 71 & 639 & \underline{|5760} \end{array}$$

- Probamos ahora con x = 1.

Como sale el resto 0 significa que **x = 1 es raíz** del polinomio, luego **(x – 1) es un factor**.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ 1 & & 1 & 1 & -9 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & -9 & \underline{|0} \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)\,(x^3 + x^2 - 9x - 9)$

- A continuación buscamos las raíces del polinomio cociente: $x^3 + x^2 - 9x - 9$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -9 & -9 \\ -1 & & -1 & 0 & 9 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \underline{|0} \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 - 9)$

Cuando obtenemos un polinomio cociente de grado 2, podemos resolver la ecuación de segundo grado:
$x^2 - 9 = 0$

Otra opción es continuar calculando las raices mediante el método de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -9 \\ 3 & & 3 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & \lfloor 0 \end{array}$$

P(x) = (x - 1) (x + 1) (x - 3) (x + 3)

Por lo tanto las raices del polinomio son **x = 1**, **x = -1**, **x = 3** y **x = -3**

EJERCICIOS REGLA DE RUFFINI Y FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1) Mediante la regla de Ruffini efectua las siguientes divisiones:

a) $(x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 5) : (x - 1)$

Cociente: $x^4 + 2x^4 + x^3 + 2x - 1$

Resto: 4

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & \boxed{4} \end{array}$$

b) $(3x^5 + 2x + 4) : (x + 2)$

Cociente: $3x^4 - 6x^3 + 12x^2 -24x + 50$

Resto: - 96

$$\begin{array}{c|cccccc} & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & & -6 & 12 & -24 & 48 & -100 \\ \hline & 3 & -6 & 12 & -24 & 50 & \boxed{-96} \end{array}$$

c) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 2)$

Cociente: $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Resto: - 2

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$

f) $(6x^3) : (x - 1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & 6 & 6 & 6 \\ \hline & 6 & 6 & 6 & \boxed{6} \end{array}$$

Cociente: $6x^2 + 6x + 6$

Resto: 6

2) Hallar el resto de las siguientes divisiones aplicando el teorema del resto:

a) $x^3 - 4x^2 + x - 2$ por $x - 3$.

$r = P(3) = 3^3 - 4{\cdot}3^2 + 3 - 2 = 27 - 36 + 3 - 2 = - 8$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 10$ por $x - 1$.

$r = P(1) = 1^4 - 2\cdot1^3 - 3\cdot1^2 + 5\cdot1 + 10 = 1 - 2 - 3 + 5 + 10 = 11$

c) $x^6 + 4x^5 - 2x + 3$ por $x + 2$.

$r = P(-2) = (-2)^6 + 4\cdot(-2)^5 - 2\cdot(-2) + 3 = 64 - 128 + 4 + 3 = - 57$

d) $x^3 - 3x^2 + 4$ por $x - 3$.

$r = P(3) = 3^3 - 3\cdot3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4$

3) Hallar las raíces enteras de los siguientes polinomios (aplica el teorema del resto o Ruffini):

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 y ±2.

$P(1) = 1^3 + 2\cdot1^2 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(-1) = (-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 -(-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(2) = 2^3 + 2\cdot2^2 - 2 - 2 = 8 + 8 - 2 - 2 = 12$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & 7 & \boxed{12} \end{array}$$

$P(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - (- 2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son **+ 1** , **- 1** y **- 2.**

b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 , ±2 , ±3 , ±4 , ±6 y ±12.

$P(2) = 2^3 + 3\cdot2^2 - 4\cdot2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

$P(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 12 = -8 + 12 + 8 - 12 = 0$

$P(-3) = (-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 - 4\cdot(-3) - 12 = -27 + 27 + 12 - 12 = 0$

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son + 2 , - 2 y - 3.

c) $x^5 + x^4 - 16x - 16$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 , ±2 , ±4 , ±8 y ±16.

$P(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 - 16\cdot(-1) - 16 = -1 + 1 + 16 - 16 = 0$

$P(2) = 2^5 + 2^4 - 16\cdot2 - 16 = 32 + 16 - 32 - 16 = 0$

$P(-2) = (-2)^5 + (-2)^4 - 16\cdot(-2) - 16 = -32 + 16 + 32 - 16 = 0$

Por lo tanto, las raíces enteras del polinomio son - 1 , + 2 y - 2.

d) $x^4 - x^3 + 4x^2 - 256$

Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente del polinomio: ±1 , ±2 , ±4 , ±8 , ±16 , ±32 , ±64 , ±128 y ±256.

$P(4) = 4^4 - 4^3 + 4\cdot4^2 - 256 = 256 - 64 + 64 - 256 = 0$

Por lo tanto la única raíz es 4.

4) Halla el valor de la constante *k* y *m* en cada caso:

a) Calcula k para que el resto de la siguiente división $5x^4 + x^2 - kx - 4 : (x - 2)$ sea - 3.

Solución:
Por el teorema del resto sabemos que el resto de esa división, que nos dicen que ha de ser -3 ha de ser igual al valor numérico del polinomio cuando x = 2, o sea:

$5 \cdot 2^4 + 2^2 - 2k - 4 = -3$ es decir: $80 + 4 - 2k - 4 = -3$; $80 - 2k = -3$; $83 = 2k$; $k = 83/2$

b) Halla m para que el resto de la división $-4x^3 + 3x^2 - mx + 1 : (x+3)$ sea 1

Solución: $-4\cdot(-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 - m\cdot(-3) + 1 = 1$

$-4\cdot(-27) + 3\cdot 9 + 3\cdot m + 1 = 1$; $108 + 27 + 3\cdot m + 1 = 1$; $3\cdot m = -135$; $m = -45$

5) Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - x - 2$

Si aplicamos la regla de Ruffini:

	1	-1	-2
-1		-1	2
	1	-2	0

Es decir: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$

b) $x^2 + x - 42$

Realizamos la factorización por el teorema del resto, por ejemplo:

$P(6) = 6^2 + 6 - 42 = 0$

$P(-7) = (-7)^2 + (-7) - 42 = 0$

Las raíces son $x_1 = 6$ y $x_2 = -7$.

$x^2 + x - 42 = (x - 6)(x + 7)$

c) $x^3 - x^2 - x + 1$

Aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 1, es decir, ±1.

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	0
1		1	1	
	1	1	0	

Por lo tanto: $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2 (x + 1)$

d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 1, es decir, ±1.

	1	2	2	1
-1		-1	-1	-1
	1	1	1	0

Por lo tanto: $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

Ya no podemos seguir factorizando ya que la única raíz entera es -1 y no se puede seguir haciendo Ruffini con los coeficientes obtenidos.

e) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

En este caso aplicamos la regla de Ruffini para los divisores de 4.

	1	2	-3	-4	4
1		1	3	0	-4
	1	3	0	-4	0
1		1	4	4	
	1	4	4	0	
-2		-2	-4		
	1	2	0		

Es decir: $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2) =$

$= (x - 1)^2 (x + 2)^2$

f) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$

Volvemos a utilizar la regla de Ruffini.

	1	-6	-11	96	-80
1		1	-5	-16	80
	1	-5	-16	80	0
4		4	-4	-80	
	1	-1	-20	0	
-4		-4	20		
	1	-5	0		

Por lo tanto: $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = (x - 1)(x - 4)(x + 4)(x - 5)$