FRECUENCIA COMPLEJA

Por

Erika Liseth Muñoz

Douglas A. Amaranto A.

CIRCUITOS ELÈCTRICOS I

Ing. Tarcisio Leal García

Universidad Industrial de Santander
Socorro – Santander

Frecuencia Compleja

Decimos que una función cuyo dominio es el tiempo, en este caso una función de voltaje o excitación. Tiene una frecuencia compleja si podemos hacer una transformación de tal manera que ya no dependa de un tiempo (t) pero si de una frecuencia (s).

Para ello consideremos la siguiente función de excitación:

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

$$V_m e^{\sigma t}\text{: Amplitud}$$

Apoyándonos en la identidad de Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\text{sen}(\alpha)$$

Tomamos la parte real:

$$\text{Re}\{ e^{j\alpha} \} = \cos(\alpha)$$

Llevandolo a la función de excitación decimos que:

$$V(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\}$$

$$V(t) = \text{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j\omega t} e^{j\theta}\}$$

$$V(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$$

$$V(t) = \text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\}$$

$$S = (\sigma + j\omega)$$

Como $e^{j\alpha}$ es la forma exponencial de un número complejo z, lo escribimos ahora en su forma polar.

$$z = |z| \angle \theta$$

$$V(t) = Re\{V_m\angle\theta e^{st}\}$$

La parte real del complejo $V_m\angle\theta e^{st}$ es lo que conocemos como una función en el dominio de la frecuencia compleja s.

$$V(s) = V_m\angle\theta e^{st}$$

$V_m\angle\theta$ es un fasor senoidal, un complejo expresado en su forma polar que gira con una velocidad angular ω y que da origen en el dominio del tiempo a la función coseno. V(s) es un fasor general con excitación compleja.

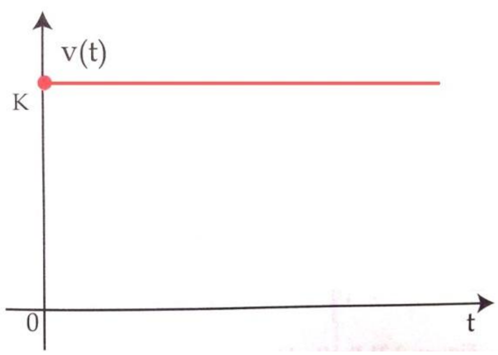
Ahora considerando los posibles valores que puede tomar s tendremos diferentes tipos de excitación o comportamientos de la función V(t).

Excitación continúa.

Si s = 0, lo que implica σ = 0 y ω = 0 tendremos:

$$V(t) = V_m e^{0*t}\cos(0*t + \theta)$$

$$V(t) = V_m\cos(\theta) = k$$

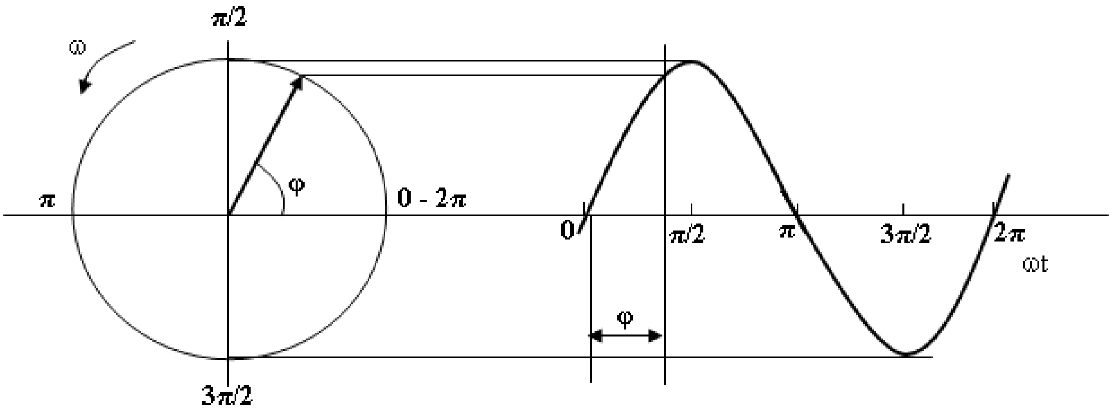


Excitación senoidal

Si s = jω lo que implica σ = 0

$$V(t) = V_m e^{0*t} \cos(\omega t + \theta)$$

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$



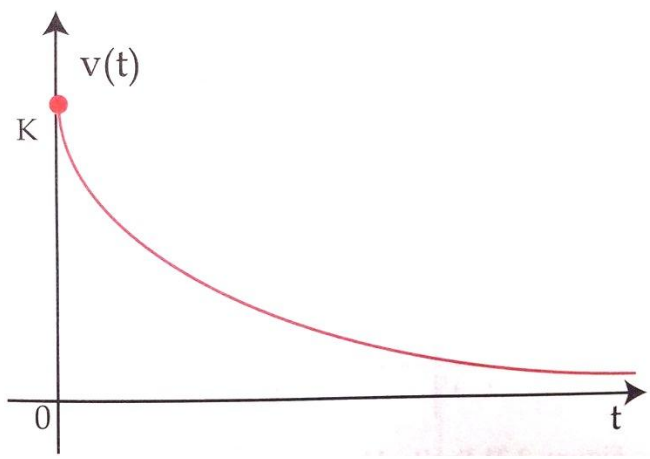
Fasor Senoidal

Excitación exponencial decreciente o amortiguada

Si s = σ y σ < 0   lo que implica ω = 0

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(0*t + \theta)$$

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\theta) \text{con } \sigma < 0$$



Cuando t aumenta, $\sigma \rightarrow \infty$ y $1/\infty$ tiende a cero y la gráfica es una curva exponencial decreciente.

El factor σ es llamado factor de amortiguamiento. Si $\sigma < 0$ es excitación amortiguada o exponencialmente decreciente, si $\sigma > 0$ entonces es no amortiguada o exponencialmente creciente.

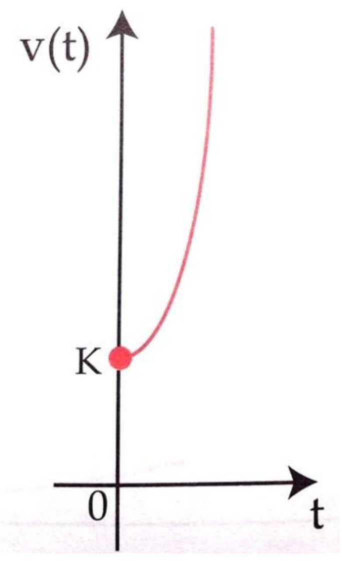
Excitación exponencial creciente o no amortiguada.

Ocurre cuando $s = \sigma$ y $\sigma > 0$ lo que implica $\omega = 0$

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(0*t + \theta)$$

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\theta) \text{ con } \sigma > 0$$

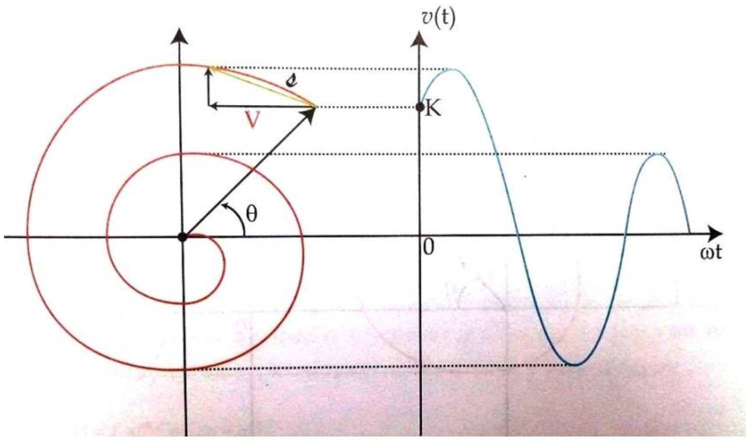
El voltaje tiende a infinito cuando $\sigma \rightarrow \infty$ y la gráfica es una curva exponencialmente creciente.



Excitación senoidal amortiguada

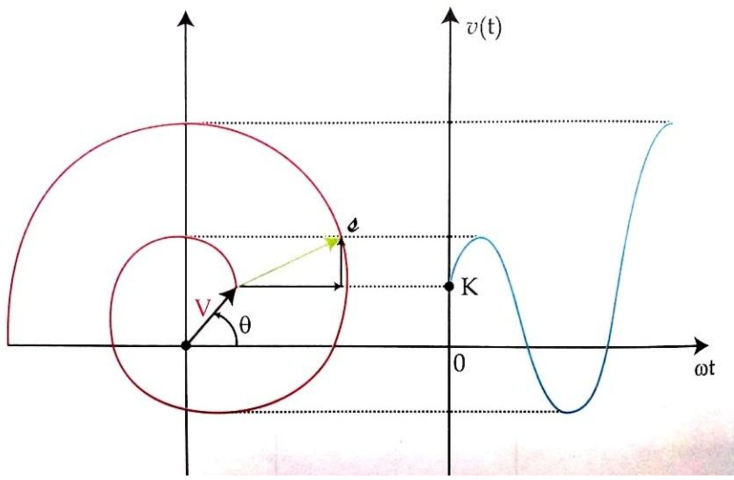
Cuando s = σ + ω con σ< 0 se dice que la excitación es senoidal amortiguada. Para su representación gráfica en el dominio del tiempo se tiene en cuenta que el fasor es un número complejo cuya magnitud y argumento varían exponencialmente en el tiempo.

El fasor es rotatorio y gira en sentido anti horario. Como el factor de amortiguamiento es menor que cero la variación exponencial de la magnitud del fasor es en forma decreciente y se obtiene una senoidal decreciente en el dominio del tiempo.



Excitación senoidal no amortiguada

Cuando s = σ + ω con σ> 0 se dice que es excitación exponencial creciente o no amortiguada por que el factor de amortiguamiento es positivo por ende la variación exponencial de la magnitud es creciente y se obtiene una senoidal creciente en el dominio del tiempo.



Impedancia y admitancia en el dominio de la frecuencia compleja.

Consideramos ahora la relación fasorial entre la tensión compleja a través de un elemento de un circuito y la corriente compleja que pasa por el mismo.

Como:

$$V(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

Se tiene una respuesta de corriente.

$$I(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$I(s) = I_m \angle \varphi e^{st}$

Relación tensión-corriente en una resistencia.

En el dominio del tiempo:

$$V(t) = R \; I(t)$$

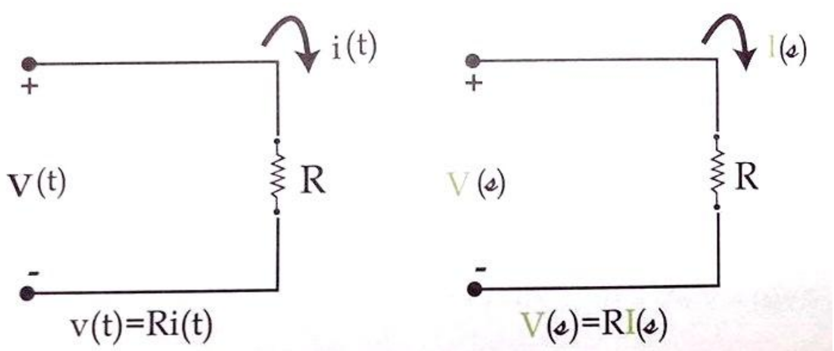
En el dominio de la frecuencia compleja:

$$V(s) = R \, I(s)$$

Se define esta relación como impedancia Z(s)

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R$$

Hay que notar que la impedancia es un complejo estático que se grafica por un punto en el plano complejo s mientras que V(s) e I(s) son complejos que giran a la velocidad angular ω, aumentando o disminuyendo según sea positivo o negativo su factor de amortiguamiento.



La admitancia Y(s) es el inverso multiplicativo de la impedancia es decir:

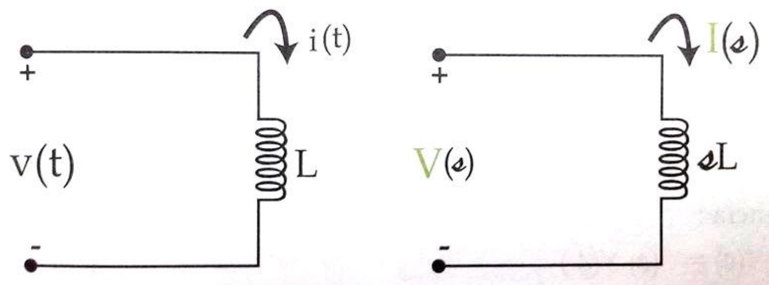
$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R} = G$$

La impedancia en una bobina L está dada por:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = L * s$$

Y la admitancia está dada por:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{s * L}$$

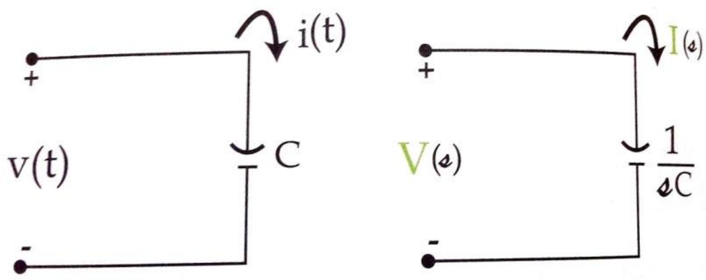


La impedancia en un capacitor C está dada por:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{s * C}$$

Y la admitancia está dada por:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = s * C$$



Función de Transferencia

Donde E(s) es la excitación o entrada y R(s) es la respuesta o salida.

En una red lineal den régimen permanente se define la función de transferencia **como la relación de la respuesta a la excitación en el dominio de la frecuencia compleja**

$$\mathbf{H(s)=R(s)/E(s)}$$

Y como en el análisis de circuitos, lo que se requiere es hallar la respuesta p salida, entonces

$$\mathbf{R(s)=H(s)E(s)}$$

Acorde con la anterior ecuación es fácil hallar la respuesta del sistema r(t), ya que la función de transferencia H(s) es propia de la red y en el análisis de circuitos siempre conocemos las fuente de excitación E(s) y por lo tanto hallamos R(s) y luego por la transformación fesoria inversa se halla la respuesta en el dominio del tiempo, r(t).

BIBLIOGRAFIA

- VILA. Raul Omar, circuitos eléctricos básicos para el estudiante. Un enfoque con la frecuencia compleja. Primera edición, 2008. Bucaramanga. Pag 85 – 124.