NÚMEROS COMPLEJOS

TARCISIO LEAL GARCÍA

Revisado por: Arbey Alexis Páez Roa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

SOCORRO-SANTANDER

2014

NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos son particularmente útiles en el análisis de los circuitos de ca.

Un número complejo Z puede escribirse en forma rectangular como:

$$Z = x + j \cdot y$$

Donde $j = \sqrt{-1}$, 'x' es la parte real de Z, en tanto que 'y' es la parte imaginaria de Z; es decir:

$$x = \mathrm{Re}\{Z\}, \qquad y = \mathrm{Im}\{Z\}$$

El numero complejo Z se muestra al graficar en el plano complejo donde el eje x es el eje de la parte real y el eje y es el eje de la parte imaginaria.

Puesto que $j=\sqrt{-1}$, se tiene que:

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j * j^2 = -j$$

$$j^4 = j^2 * j^2 = 1$$

$$j^5 = j^3 * j^2 = j$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS:

La suma de 2 números complejos se define como el número complejo cuya parte real es la suma de las 2 partes reales, y la parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de los dos números complejos, por lo tanto:

Sea A= $a + j \cdot b$; B= $c + j \cdot d$, entonces

$$A + B = (a + c) + j \cdot (b + d)$$

La diferencia de números complejos se calcula de manera similar.

$$A - B = (a + c) - j \cdot (b + d)$$

El producto de los números complejos se define mediante:

$$(A)(B) = (a + j \cdot b) \cdot (c + j \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + j(b \cdot c + a \cdot d)$$

El conjugado de un número complejo A se presenta como A*. Se obtiene fácilmente con solo cambiar el signo de la parte imaginaria del número complejo de la forma:

A= $a + j \cdot b$ entonces: A*= $a - j \cdot b$

También es evidente que si A* es el conjugado de A, entonces A es el conjugado de A* en otras palabras:

A = (A*)*

El cociente de los números complejos se define por:

$$\frac{A}{B} = \frac{(A) \cdot (B^*)}{(B) \cdot (B^*)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a + \mathrm{jb}}{c \ + jd} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + j(b \cdot c - d \cdot a)}{c^2 + \ d^2}$$

Una segunda forma de representar el numero complejo Z es especificado su magnitud *r* y el ángulo *f* que forma con el eje real. Esto se conoce como la forma polar, está dada por:

Z = |Z|·Θ = *r*·Θ

Donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\Theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$x = r \cdot \cos\Theta$ $y = r \cdot \mathrm{sen}\Theta$

$Z = x + j \cdot y = r \cdot \Theta = r \cdot \cos\Theta + j \cdot r \cdot \mathrm{sen}\Theta$

Al convertir de forma rectangular a forma polar 4 posibilidades para hallar el valor de Θ:

$Z = x + j \cdot y$	$\Theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	primer cuadrante
$Z = -x + j \cdot y$	$\Theta = 180° - \tan^{-1}\frac{y}{x}$	segundo cuadrante
$Z = -x - j \cdot y$	$\Theta = 180° + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	tercer cuadrante
$Z = x - j \cdot y$	$\Theta = 360° - \tan^{-1}\frac{y}{x}$	cuarto cuadrante

Suponiendo que 'x', 'y' son positivos, y que al calcular las tangentes inversas la calculadora está configurada para grados.

La tercera forma de representar el número complejo Z es la forma exponencial:

$$Z = r\cdot e^{j\Theta}$$

Esta es casi igual a la forma polar porque se usa la misma magnitud *r* y el ángulo Θ.

En resumen las 3 formas de representar un número complejo son las siguientes:

$Z = x + j\cdot y$	$(x = r\cdot \cos\Theta,\ \ y = r\cdot \mathrm{sen}\Theta)$	Forma rectangular
$Z = r\cdot\Theta$	$(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ \Theta = \tan^{-1}\frac{y}{x})$	Forma polar
$Z = r\cdot e^{j\Theta}$	$(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ \Theta = \tan^{-1}\frac{y}{x})$	Forma exponencial

FÓRMULA DE EULER:

La fórmula de Euler es un resultado importante para las variables complejas. Se deduce a partir de la expansión de las series e^x, cosΘ y senΘ. Se sabe que:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ Reemplazando por *jΘ*

$e^{j\Theta} = 1 + j\cdot\Theta - \frac{\Theta^2}{2!} - j\cdot\frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^4}{4!} \ldots$

Asimismo

$\mathrm{Cos}\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \frac{\Theta^6}{6!} + \ldots;$ $\mathrm{Sen}\Theta = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \frac{\Theta^7}{7!} + \ldots$

Por lo que

$$\mathrm{Cos}\Theta + j\cdot\mathrm{Sen}\Theta = 1 + j\Theta - \frac{\Theta^2}{2!} - j\frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^4}{4!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \ldots$$

Al igualar las ecuaciones se obtiene:

$$e^{j\Theta} = \mathrm{Cos}\Theta + j\mathrm{Sen}\Theta$$

Esta se conoce como la 'fórmula de Euler'. La forma exponencial de representación de un número complejo se basa en la fórmula de Euler

EJEMPLOS:

1) Sean A= 2 + 4*j* ; B= 1 – 5*j*; C= -3 + 6*j* determine:

a) A + B – C

b) $(A + C)B^2$

c) $\frac{(A+B*)}{C}$

d) $(A - A*)(B + B*)$

RESPUESTA:

a)

(2 + 4j) + (1-5j) – (-3 + 6j) = 6 – 7j

b)

A + C = (2 + 4j) + (-3 +6j) = -1 +10j

B^2 = (B)(B) (También se puede desarrollar usando el cuadrado perfecto)

= (1 – 10j – 25)= -24 – 10j

$(A+C)B^2$ = (-1 + 10j) (-24 – 10j)

= (24 + 100) + j(-240 + 10) = 124 – 230j

c)

(A +B*)= (2 + 4j) + (1 +5j) = 3 + 9j

$$\frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}*)}{C} = \frac{(\mathrm{A} + \mathrm{B}*)(\mathrm{C}*)}{C(C*)} = \frac{(3+9j)(-3-6j)}{3^2+6^2}$$

$$= \frac{(-9 + 54) + j(-27-18)}{45} = \frac{45-45j}{45} = 1 - j$$

d)

A – A* = (2 + 4j) – (2 – 4j) = 8j

B + B* = (1 – 5j) + (1 + 5j) = 2

(A – A*)(B + B*)= (0 – 0) + j(16 + 0) = 16j

2) Exprese los siguientes números complejos en forma polar y exponencial

a) Z= 6+ 8j

b) Z= 6 - 8j

c) Z= -6+ 8j

d) Z= -6 - 8j

RESPUESTA:

a)

Z= 6+ 8j (primer cuadrante)

r=$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ Θ=$\tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13^o$

Forma exponencial: $10e^{j53.13}$

b)

Z= 6 - 8j (cuarto cuadrante)

r=$\sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$ Θ=$360 - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 306.87^o$

Forma exponencial: $10e^{j306.87} = 10e^{-j53.13}$

c)

Z= -6 + 8j (segundo cuadrante)

r=$\sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ Θ=$180 - \tan^{-1}\frac{8}{6} = 126.87^o$

Forma exponencial: $10e^{j126.87}$

d)

Z= -6 - 8j (tercer cuadrante)

r=$\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$ Θ=$180 + \tan^{-1}\frac{8}{6} = 233.13^o$

Forma exponencial: $10e^{j233.13}$

BIBLIOGRAFÍA

Charles K. Alexander, Matthew N.O Sadiku. Fundamentos de circuitos eléctricos. Tercera ed. Apéndice B. (A9 - A15)

William H. Hayt Jr, Jack E. Kemmerly, Steven M. Durbin. Analisis de circuitos en ingenieria. Octava ed. Apendice 5 (pag 817-826)