Introducción al control óptimo

Agenda

Control óptimo en tiempo continuo – motivación

- Formulación del problema
- Principio del máximo de Pontryagin
- Caso de estudio: movimiento de una masa

Control óptimo en tiempo discreto – motivación

- Formulación del problema
- Ecuación de Bellman
- Caso de estudio: Fishery Lotka-Volterra

PMP vs PD

- Ejemplos sencillos
- Control óptimo de un tren

Parte 1

Control óptimo en tiempo continuo – motivación

Formulación del problema

De manera general, el problema del control óptimo de un sistema dinámico en tiempo continuo descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t), t)$$

consiste en encontrar una trayectoria de control $u^*(t)$ que lleve el sistema desde un estado inicial

$$x(t_a) = x_a$$

hacía un estado final en un rango admisible

$$x(t_b) \in S \subseteq R_n$$

Formulación del problema

$w(t)$ representa un conjunto de variables externas no controlables

La trayectoria del sistema, debe satisfacer restricciones

$$x(t) \in \Omega_x(t) \subseteq R_n;\ t \in [t_a, t_b]$$

$$u(t) \in \Omega_u(t) \subseteq R_n;\ t \in [t_a, t_b]$$

Y debe minimizar una función objetivo J

$$J\big(u(t)\big) = K\big(x(t_b)\big) + \int_{t_a}^{t_b} g(x(t), u(t), w(t), t)\, dt$$

Formulación del problema

El control $u^*(t)$ que resuelve el problema se denomina control óptimo

La trayectoria de evolución de las variables de estado

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$$

Se denomina trayectoria de estado óptima

Principio del Máximo de Pontryagin – PMP

El Principio del Máximo de Pontryagin da condiciones necesarias que debe cumplir la trayectoria de control óptimo.

El Hamiltoniano del sistema propuesto se define como:

$$H(x(t), u(t), \rho(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \rho(t)\dot{x}(t)$$

Donde ρ es el conjunto de variables adjunta definidas por:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Principio del Máximo de Pontryagin – PMP

Sea $u^*(t)$ el control óptimo entonces se cumple que

$$\frac{\partial H}{\partial u^*} = 0$$

y además

$$H\big(u^*(t)\big) = \max_{u \in U} H\big(u(t)\big);\ \forall\, t \in [t_a, t_b]$$

para cada t ∈ [ta, tb].

En el caso de que x(t_f) no esté restringida, entonces $\rho\big(t_f\big) = 0$.

Ejemplo 1

Considere una masa distribuida que debe ser transportada desde un punto A hasta un punto B en línea recta una distancia d.

El desplazamiento debe ser realizado en un tiempo definido.

La dinámica del sistema se controla mediante la fuerza aplicada por unidad de masa (aceleración).

Ejemplo 1

1) Definición de las variables

$x_1(t)$ – posición del cuerpo en el tiempo t

$x_2(t)$ – velocidad del cuerpo en el tiempo t

u(t) – aceleración del cuerpo en el tiempo t

Se busca minimizar el costo de la acción de control representado por la siguiente función:

$$J = \int_{t_a}^{t_b} -u^2 dt$$

Ejemplo 1

Definición del problema

$x_1(t_0) = X_0$ – posición inicial

$x_1(t_f) = X_f$ – posición final

$x_2(t_0) = V_0$ – velocidad inicial

$x_3(t_f) = V_f$ – velocidad final

Ejemplo 1

Pasos a seguir (Y ahora una receta de cocina☺):

1) Definir el Hamiltoniano

2) Calcular las variables adjuntas

3) Minimizar el Hamiltoniano

4) Calcular las constantes de integración

Ejemplo 1

1) Definición del Hamiltoniano

$$H = g(x(t), u(t), t) + \sum_i \rho_i \frac{dx_i}{dt}$$

$$g(x(t), u(t), t) = -u^2; \qquad \frac{dx_1}{dt} = x_2; \qquad \frac{dx_2}{dt} = u$$

$$H = -u^2 + \rho_1 x_2 + \rho_2 u$$

Ejemplo 1

2) Calculo de la variables adjuntas

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial(-u^2 + \rho_1 x_2 + \rho_2 u)}{\partial x_i}$$

$$\frac{d\rho_1}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = -\rho_1$$

$$\rho_1 = -k_1$$

$$\rho_2 = k_1 t + k_2$$

Ejemplo 1

3) Minimizar el Hamiltoniano y hallar el control óptimo

$$\frac{\partial H}{\partial u_i^*} = \frac{\partial(-u^2 + \rho_1 x_2 + \rho_2 u)}{\partial u} = 0$$

$$-2u + \rho_2 = 0$$

$$u = \frac{\rho_2}{2}$$

$$u = \frac{k_1}{2} t + \frac{k_2}{2}$$

Ejemplo 1

4) Calcular las constantes de integración.

$$u = \frac{k_1}{2}t + \frac{k_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{k_1}{4}t^2 + \frac{k_2}{2}t + V_o$$

$$x_1 = \frac{k_1}{12}t^3 + \frac{k_2}{4}t^2 + V_o t + X_o$$

Ejemplo 1

4) Calcular las constantes de integración

$$x_f = \frac{k_1}{12} t_f^3 + \frac{k_2}{4} t_f^2 + V_o t_f + X_o$$

$$V_f = \frac{k_1}{4} {t_f}^2 + \frac{k_2}{2} t_f + V_0$$

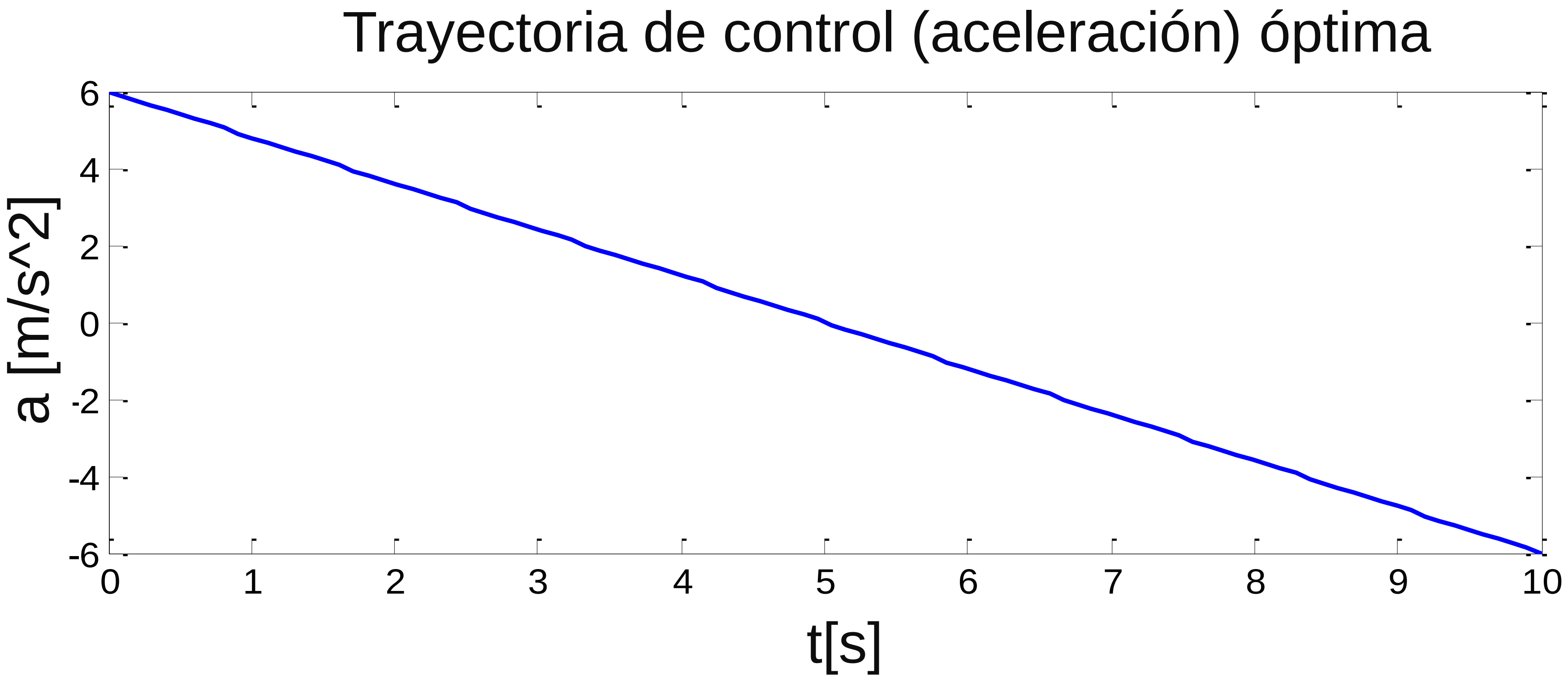
En forma matricial

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} {t_f}^2 & \frac{1}{2} t_f \\ \frac{1}{12} {t_f}^3 & \frac{1}{4} {t_f}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_f - V_0 \\ X_f - X_0 - V_0 t_f \end{bmatrix}$$

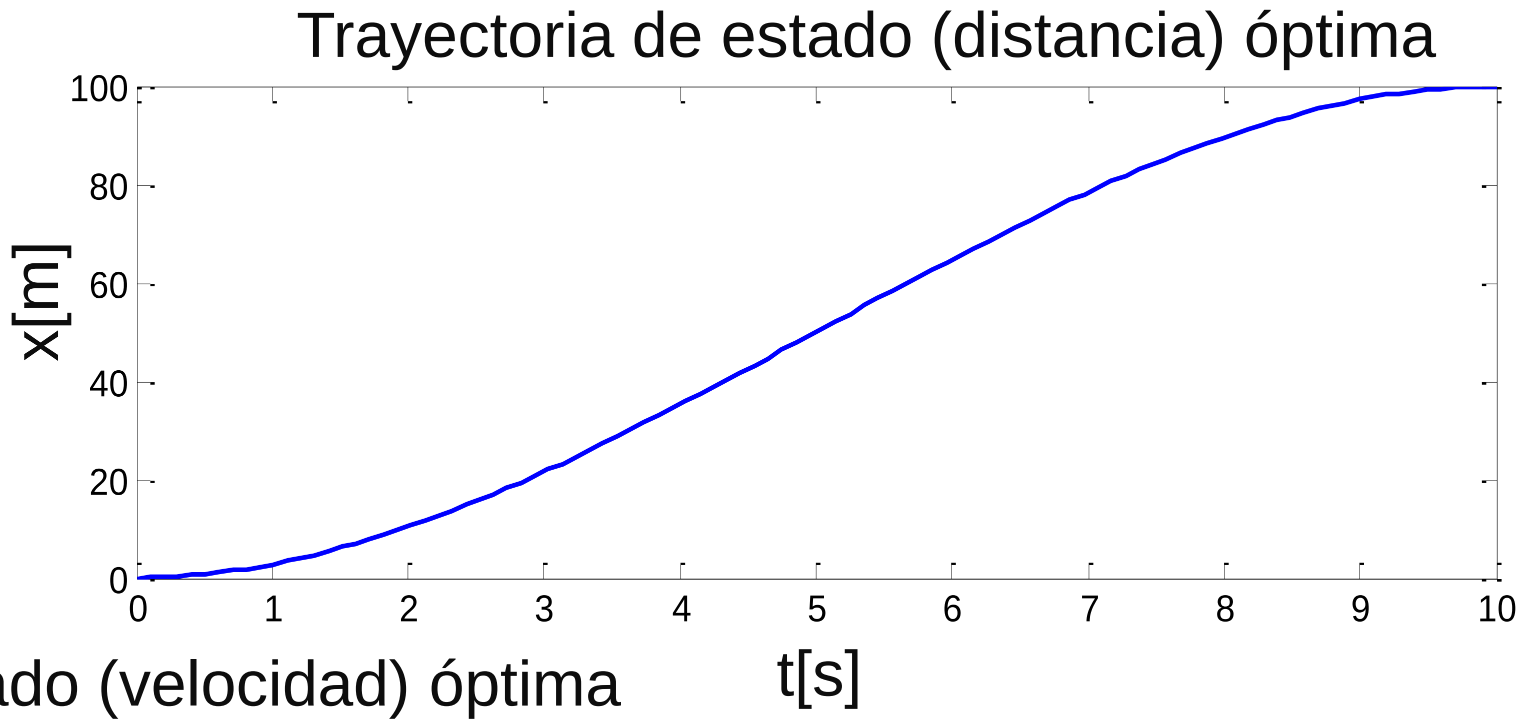
Ejemplo 1

Resolver el problema para las siguientes condiciones:

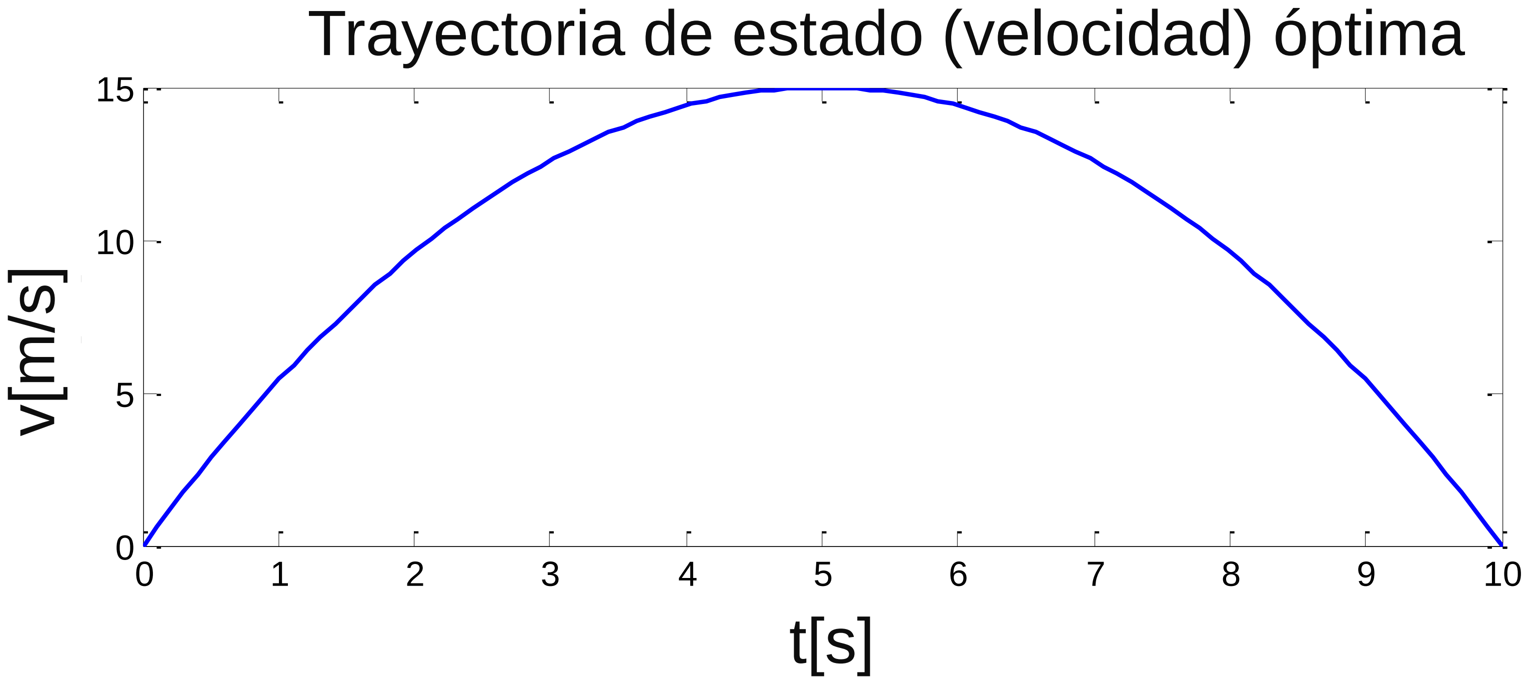
$$V_f = V_0 = X_0 = 0;\ X_f = 100;\ t_f = 10$$



Ejemplo 1



Trayectoria de estado (distancia) óptima
x[m]
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t[s]



Trayectoria de estado (velocidad) óptima
v[m/s]
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t[s]

Parte 1

Control óptimo en tiempo discreto – motivación

Formulación del problema

De manera general, el problema del control óptimo de un sistema dinámico en tiempo discreto descrito por la ecuación en diferencias

$$x_{k+1} = F_k(x_k, u_k, w_k, k) = f_k(x_k, u_k, w_k, k) + x_k; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad x_k \subseteq X_k$$

consiste en encontrar un conjunto de controles π

$$\pi = \{u_0, u_1, \ldots u_{\mathrm{N}-1}\} \;\; u_k \subseteq U_k$$

para que el sistema sea llevado desde un estado inicial

$$x(0) = x_0$$

hasta un estado final admisible

$$x_N \in S \subseteq R_n$$

Formulación del problema

Minimizando una función objetivo J

$$J_\pi(x_0) = \varphi(x_N) + g_N(x_N) \ + \sum_{k=0}^{N-1} h_k(x_k, u_k, w_k, k) + \varphi(x_k)$$

El conjunto de control optimo es el conjunto π^0 que minimiza J_π

$$J^o(x_0) \ = \min_{\pi \epsilon \Pi} J_\pi(x_0)$$

Principio de óptimalidad de Bellman

“dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima”

Principio de óptimalidad de Bellman

Based on the principle of optimality [1], the DP algorithm evaluates the optimal cost-to-go[1] function $\mathcal{J}_k(x^i)$ at every node in the discretized state-time space[2] by proceeding *backward* in time:

1) End cost calculation step

$$\mathcal{J}_N(x^i) = g_N(x^i) + \phi_N(x^i) \tag{11}$$

2) Intermediate calculation step for $k = N - 1$ to 0

$$\mathcal{J}_k(x^i) = \min_{u_k \in \mathcal{U}_k} \{h_k(x^i, u_k) + \phi_k(x^i) \dots \\ + \mathcal{J}_{k+1}(F_k(x^i, u_k))\} \tag{12}$$

The optimal control is given by the argument that minimizes the right-hand side of equation (12) for each x^i at time index k of the discretized state-time space.

Principio de optimalidad de Bellman

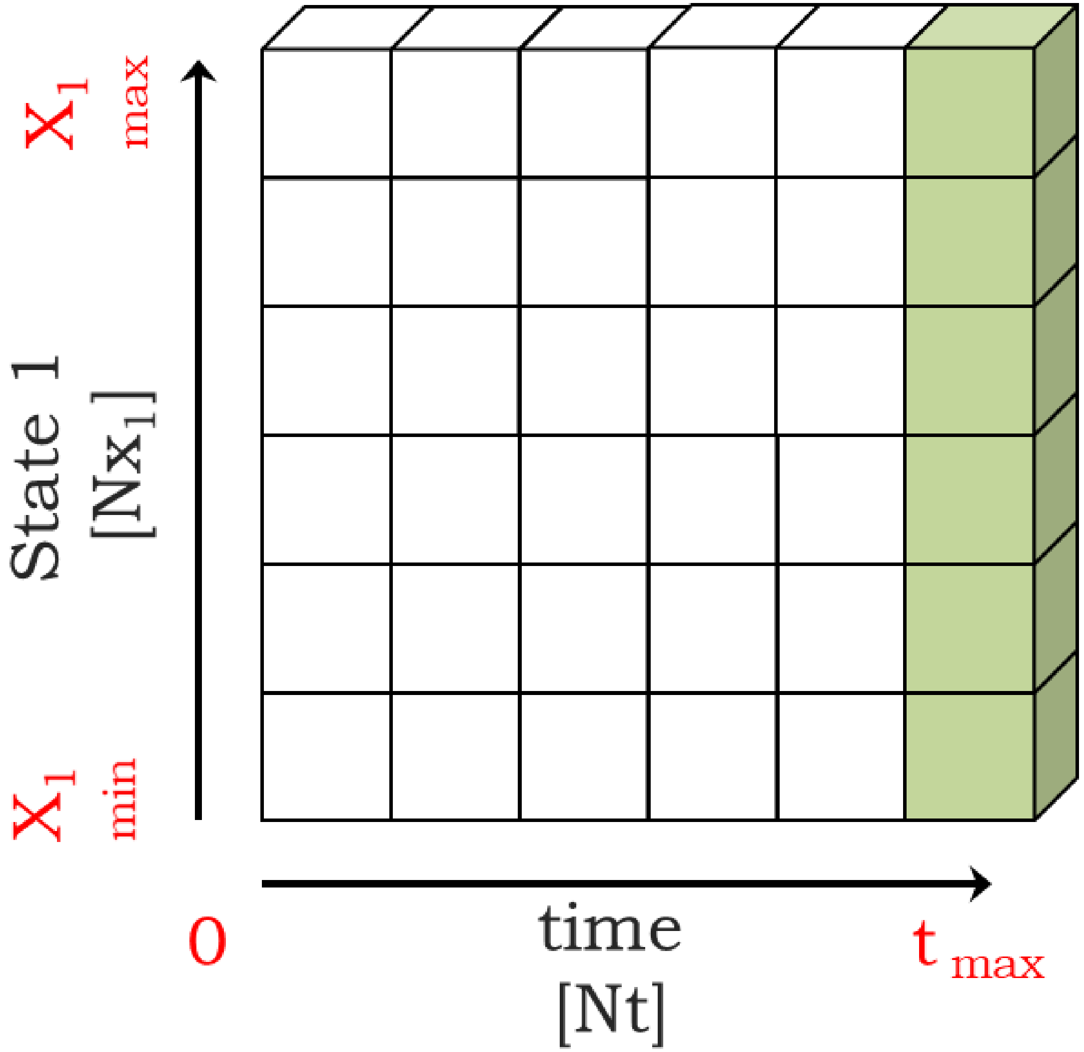
1) Cálculo del costo final

$$J_N(x_i) = \varphi(x_N) + g_N(x_N)$$

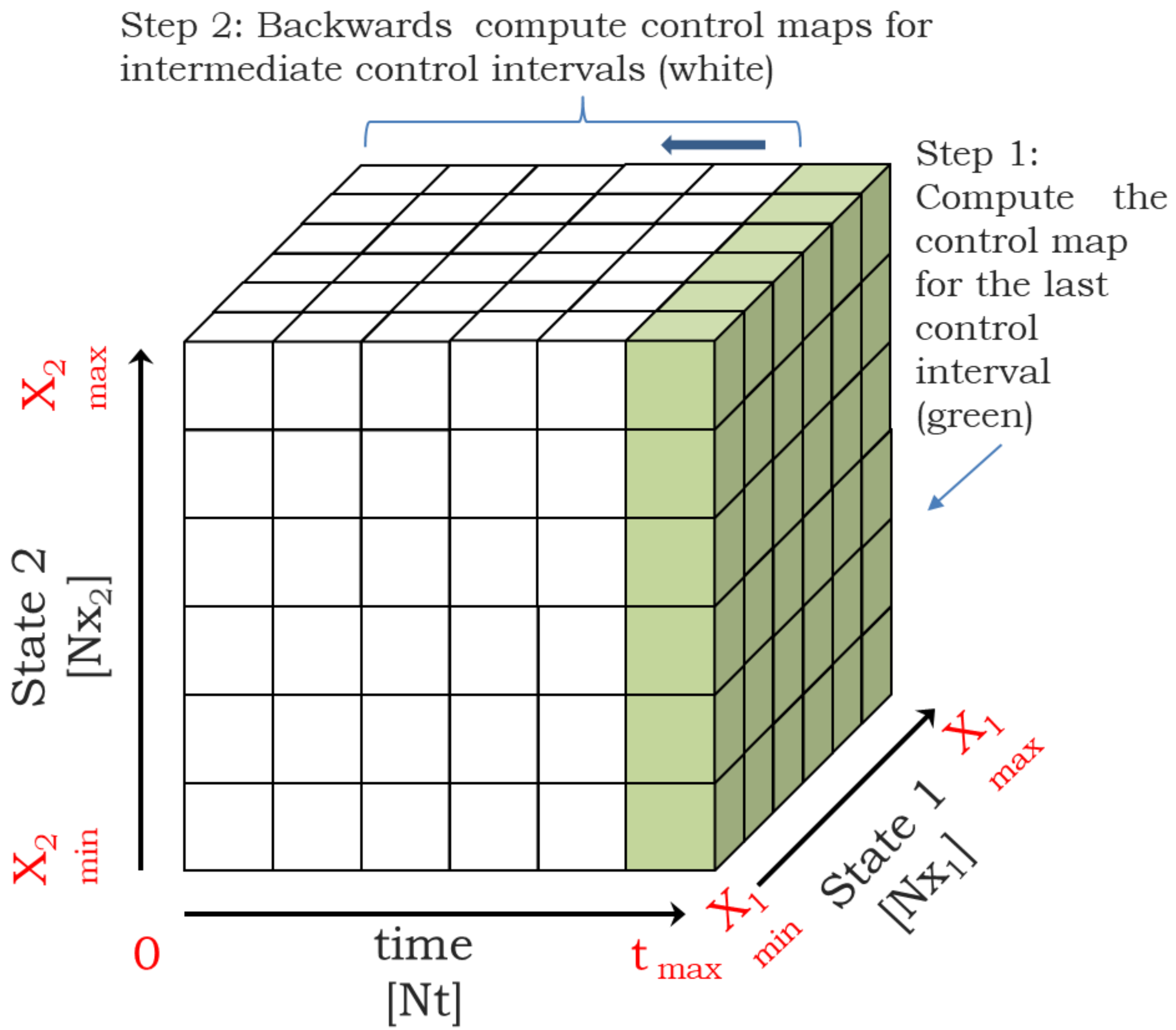
2) Cálculos intermedios para k = N − 1 hasta 0

$$J_k(x_i) = \min_{u_k \epsilon U_k} \{h_k(x_i, u_k) + \varphi(x_i) + J_{k+1}(F_k(x_k, u_k))\}$$

Principio de optimalidad de Bellman



Principio de óptimalidad de Bellman



Ejemplo 2

Considere un sistema dinámico descrito por la ecuación:

$$f(x_k, u_k) = \Delta t \left(\frac{2}{100} \left(x_k - \frac{x_k^2}{1000} \right) - uk \right)$$

Maximizar la función

$$\sum_{k=0}^{N-1} u_k \Delta t$$

Ejemplo 2

Sujeto a las restricciones

$$x_0 = 250$$

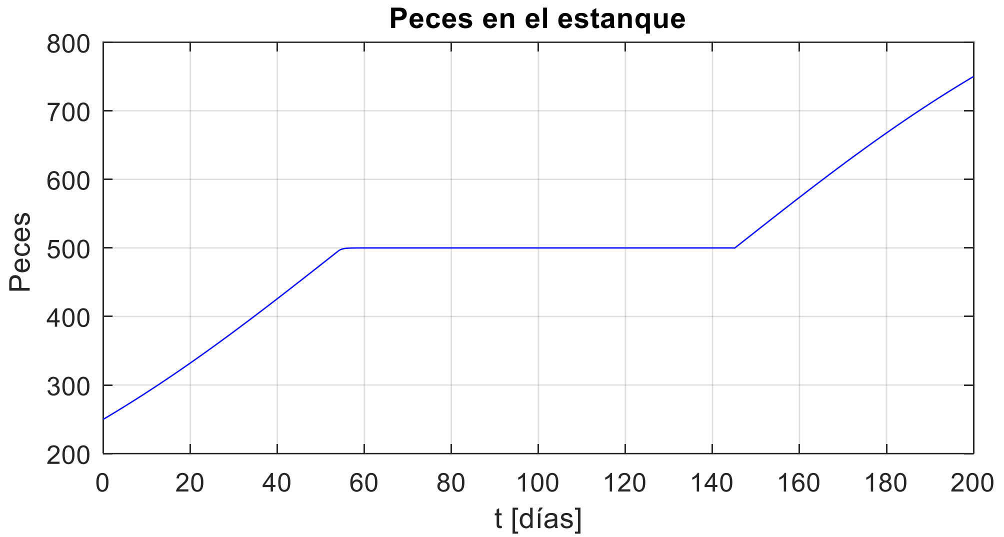
$$x_N \geq 750$$

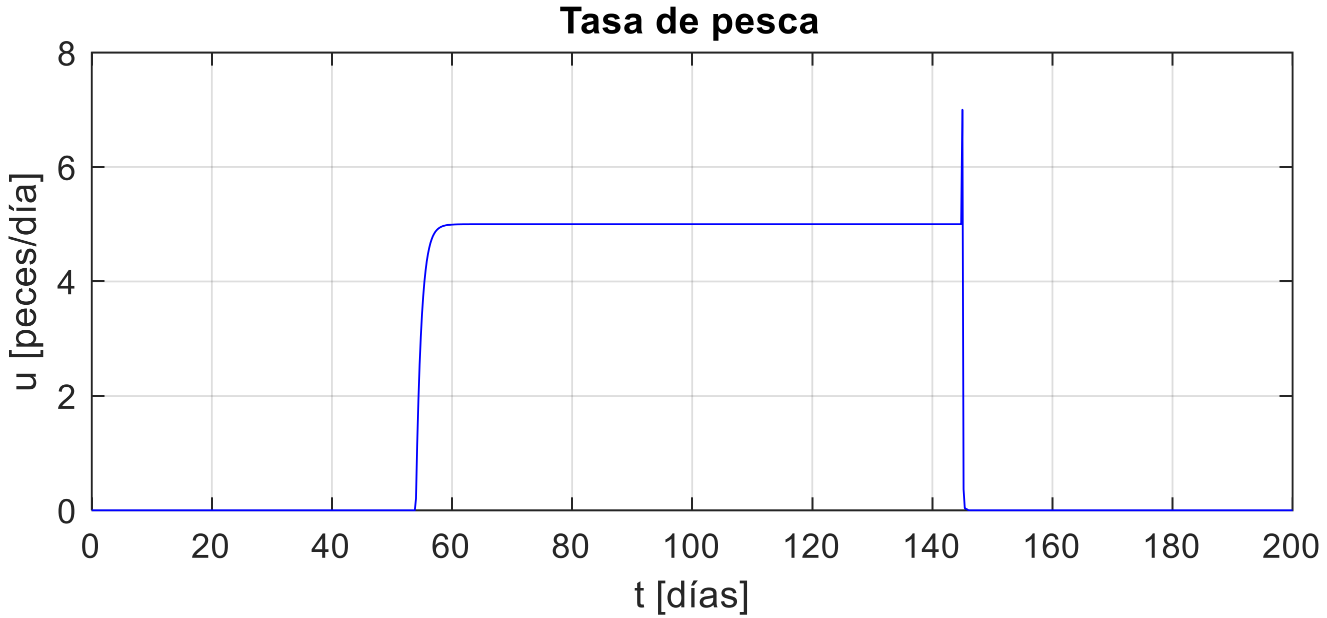
$$x_k \in [0, 1000]$$

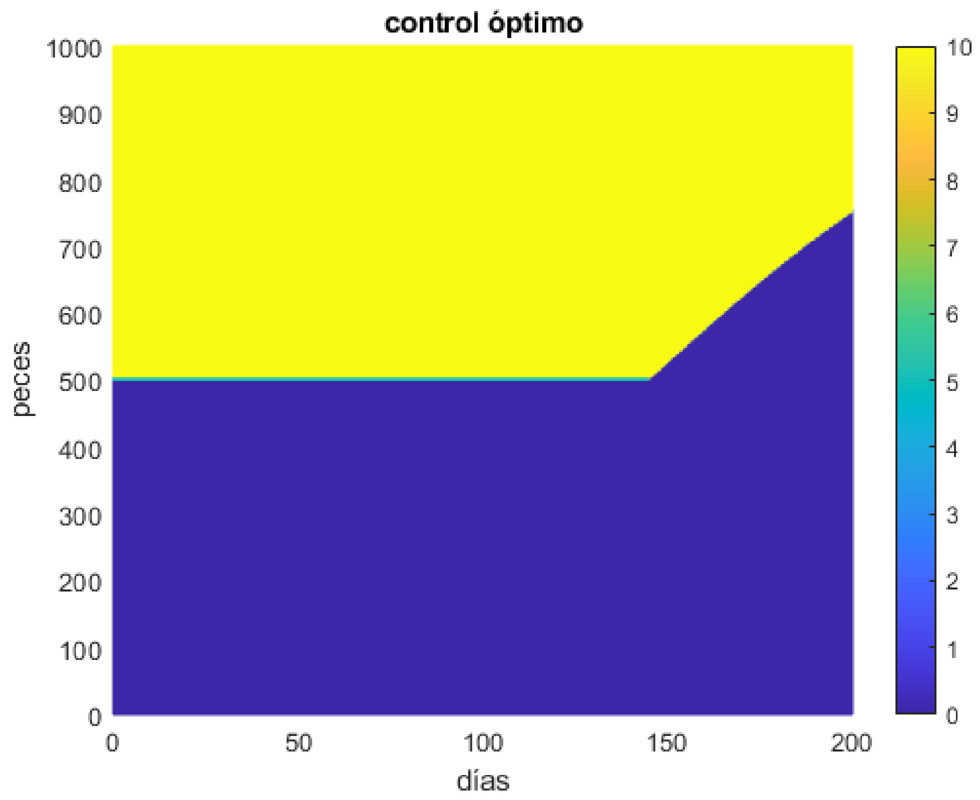
$$u_k \in [0, 10]$$

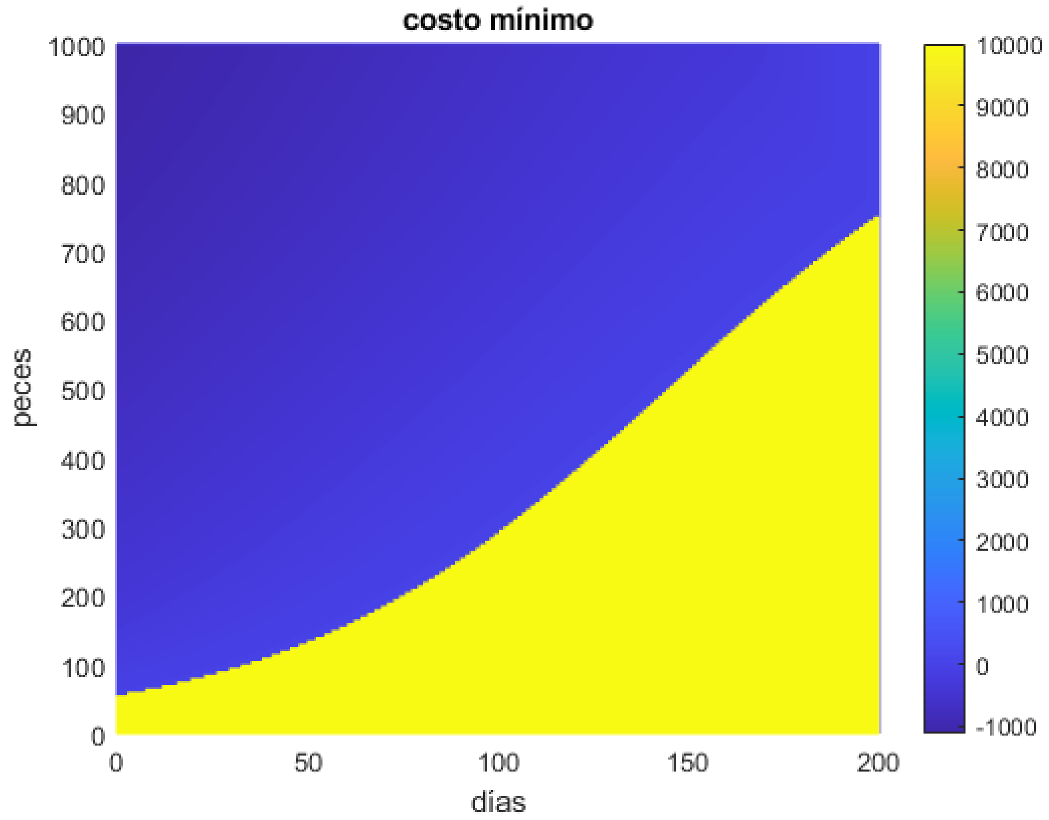
$$t_0 = 0$$

$$t_f = 200$$


Peces en el estanque
Peces
800
700
600
500
400
300
200
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
t [días]


Tasa de pesca
u [peces/día]
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
t [días]


control óptimo
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
peces
0
50
100
150
200
días
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0


costo mínimo
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
peces
0
50
100
150
200
días
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000

Parte 3

PMP vs PD

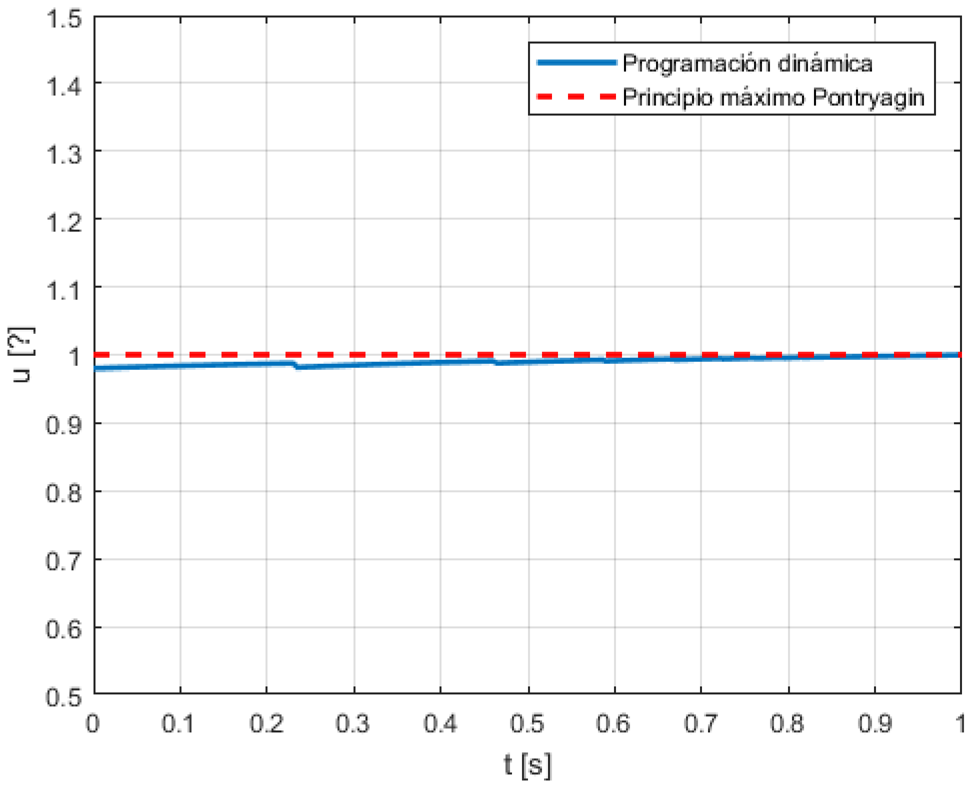
Trabajo propuesto 1

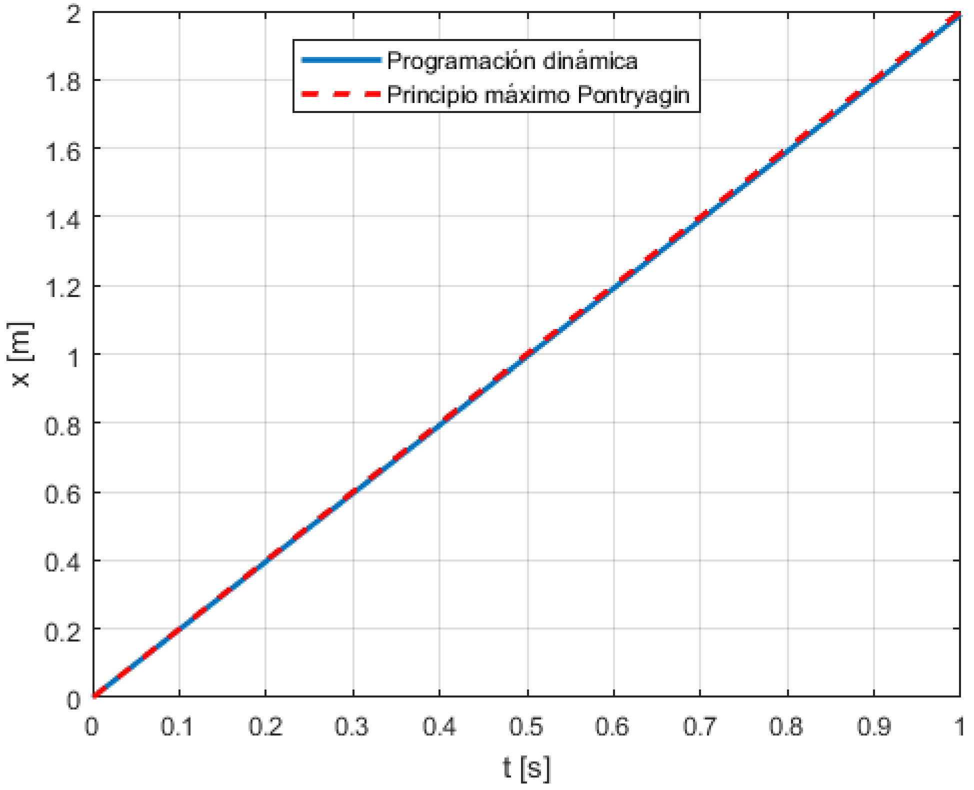
Supongamos que el crecimiento de una planta se puede acelerar mediante una luz artificial. Sea x(t) la altura de la planta al tiempo t.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u$$

En donde u = u(t) es el exceso de la tasa de crecimiento debido a la luz artificial. Supondremos también que x(0) = 0 y que x(1) = 2. Se pide minimizar el costo total debido a la luz artificial.

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt$$


Programación dinámica
Principio máximo Pontryagin
u [?]
t [s]


Programación dinámica
Principio máximo Pontryagin
x [m]
t [s]

Trabajo propuesto 2

Maximizar

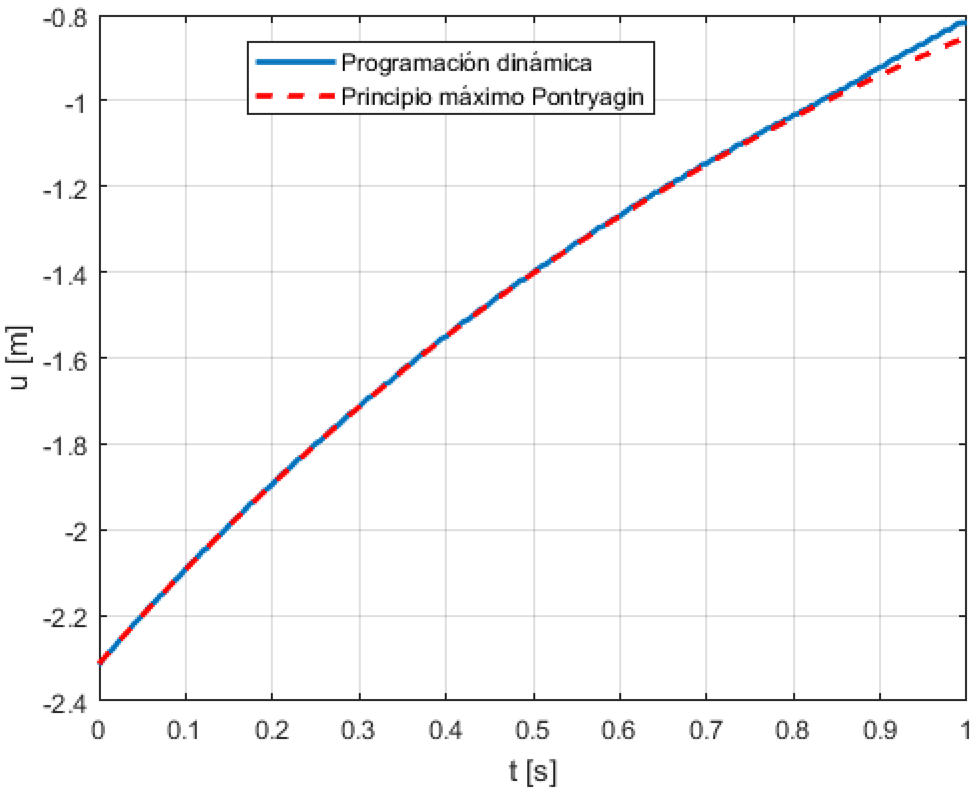
$$J = \int_0^1 -u^2 \, dt$$

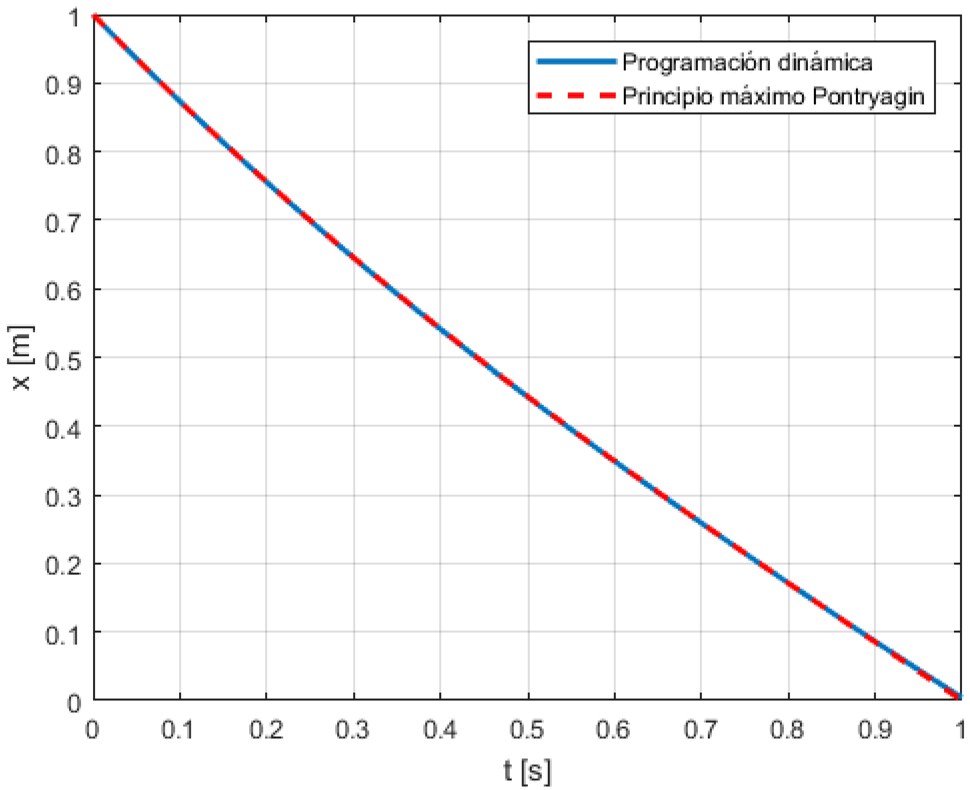
sujeto a las condiciones

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 0.$$


Programación dinámica
Principio máximo Pontryagin
u [m]
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
-1.8
-2
-2.2
-2.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t [s]


Programación dinámica
Principio máximo Pontryagin
x [m]
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
t [s]

Automatica 45 (2009) 2692–2698

Contents lists available at ScienceDirect

Automatica

journal homepage: www.elsevier.com/locate/automatica

Brief paper

Local energy minimization in optimal train control☆

P.G. Howlett*, P.J. Pudney, Xuan Vu

Centre for Industrial and Applied Mathematics, Mawson Lakes Campus, University of South Australia, Mawson Lakes, 5095, Australia

ARTICLE INFO

Article history:
Received 30 November 2008
Received in revised form
26 June 2009
Accepted 27 July 2009
Available online 22 September 2009

Keywords:
Optimal train control
Energy minimization
Calculus of variations

ABSTRACT

The calculation of optimal driving strategies for on-board control of freight trains is a challenging task. In this paper we calculate the critical switching points for a globally optimal strategy on a track with steep gradients using a new local energy minimization principle. The method has been used successfully in Australia to calculate optimal switching points and hence provide in-cab advice to train drivers on long-haul freight trains.

Proceedings of the 39th IEEE
Conference on Decision and Control
Sydney, Australia • December, 2000

An algorithm for the optimal control of the driving of trains

Rüdiger Franke
ABB Corporate Research
Ruediger.Franke@de.abb.com

Peter Terwiesch
ABB Corporate Research
Peter.Terwiesch@ch.abb.com

Markus Meyer
ADtranz (Switzerland)
Markus.Meyer@ch.adtranz.com

6 Conclusions

We discuss a new algorithm for the minimization of the traction energy used by a train. Compared to approaches known from the literature, we have obtained the following improvements.

A different formulation allows us to solve the nonlinear equtions of motion analytically for sections of constant track parameters. Exploiting this, a Discrete Dynamic Programming (DDP) algorithm is implemented, which is suitable for a real-time implementation of a Nonlinear Model Predictive Controller (NMPC).