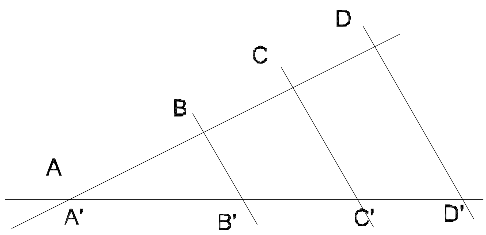
Tema 4 Construcciones geométricas

Operaciones con segmentos y ángulos

El teorema de Thales

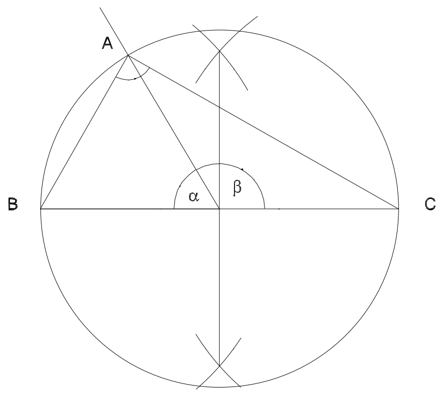
Si se cortan dos rectas concurrentes, r y s, por un haz de rectas paralelas, los segmentos resultantes sobre la recta r son proporcionales a los determinados sobre la recta s. Es decir, son indirectamente proporcionales. (la demostración se puede consultar en http://www.iesadpereda.net/thales/thales.htm)

AB/A'B' = BC/B'C' = CD/C'D'



El segundo teorema de Thales relaciona el triangulo inscrito en una circunferencia y sus ángulos.

La circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo pasa por el vértice del ángulo recto.



La construcción con Autocad 2010:

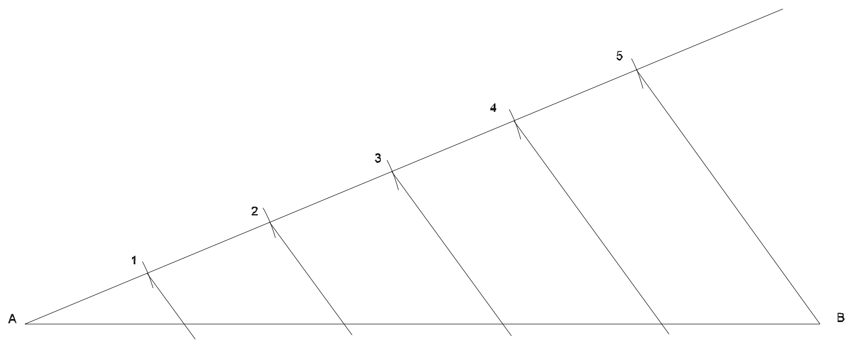
1. Dibujar un segmento BC. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Línea
2. Construir la mediatriz. Para ello dibujar dos arcos con el mismo radio partiendo de B y C. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Arco con la opción

Centro, Inicio y Fin. Donde se cortan arriba y debajo de BC se traza la mediatriz. Construir la línea como en 1.
3. Dibujar una circunferencia centrada en el punto medio de BC y con diámetro BC. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Circunferencia con la opción centro y radio.
4. Desde el centro del segmento BC dibujar una línea que corte la circunferencia
5. Dibujar una línea partiendo de B hasta el corte de la circunferencia con la línea del punto 4. Continuar la línea ahora desde ese punto hasta C.
6. Se puede cambiar el grosor de la línea. Menú: Inicio/Propiedades; Herramienta: Grosor de línea.

Extensión del teorema de Thales

Estos teoremas de Thales nos permiten, entre otras cosas dividir en partes iguales cualquier segmente, de forma geométrica.

Dado un segmento AB que queremos subdividir en 5 partes iguales, dibujamos una recta r que pase por A con un ángulo cualquiera diferente de 0º. Tomando una distancia cualquiera fija, y partiendo de A , trazamos sobre r los segmentos contiguos correspondientes hasta contar 5. Trazamos a continuación una línea del final del quinto segmento hasta B. Con trazar las paralelas a esta línea que pasen por los otros finales de segmento, conoceremos los cortes sobre AB que subdividen AB en 5 partes iguales.



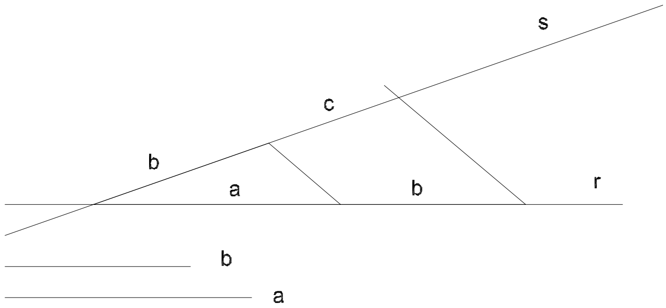
La construcción con Autocad 2010:

1. Dibujar un segmento AB. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Línea
2. Dibujar una recta con origen en A. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Línea
3. Dibujar arcos con el mismo radio partiendo de A y una continuación de otro. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Arco con la opción Inicio, Fin y Radio. Fijar el radio cada vez a una distancia fija. Corregir el centro cada vez para asegurar que la distancia se constante.
4. Dibujar la línea que uno 5 y B.
5. Dibujar las paralelas que pasen por 1, 2, 3 y 4.

Tercera proporcional

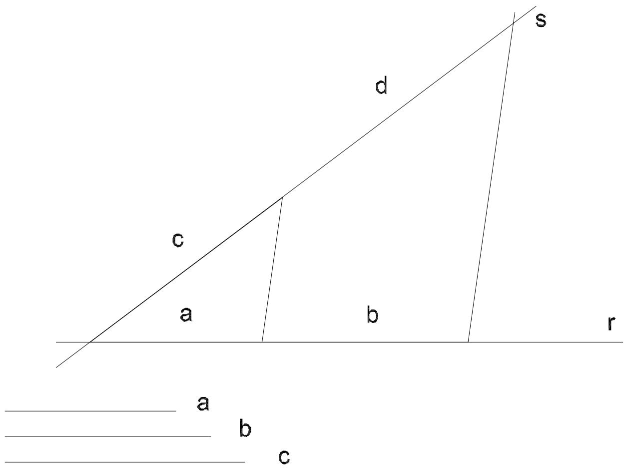
Dados dos segmentos a y b, se denomina tercera proporcional al segmento c, si este cumple que a/b = b/c.

Si se trazan dos rectas que se cortan, r y s, se colocan sobre r los dos segmentos a y be contiguos y sobre s el segmento b. Se traza ahora la línea entre el punto entre a y b sobre r y el extremo de b sobre s y se construye una paralela a este segmento al final de b. El segmento resultante es c.



Cuarta proporcional

Dados tres segmentos a, b y c, se denomina cuarta proporcional al segmento d, si éste cumple que a/b = c/d.

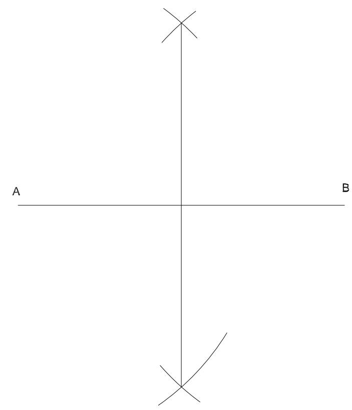


Construcciones de perpendiculares: meadiatriz de un segmento

La meadiatriz de un segmento se construye trazando sendos arcos desde los extremos del segmento (el radio debe ser mayor que la mitad de la longitud del segmento y es conveniente que bastante más largo). Los puntos donde se cortan los arcos por encima y por debajo del segmento definen la recta perpendicular que divide el segmento en dos partes iguales.

La construcción con Autocad 2010:

1. Construir la mediatriz. Para ello dibujar dos arcos con el mismo radio partiendo de B y C. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Arco con la opción Centro, Inicio y Fin. Donde se cortan arriba y debajo de BC se traza la mediatriz. Construir la línea como en 1.



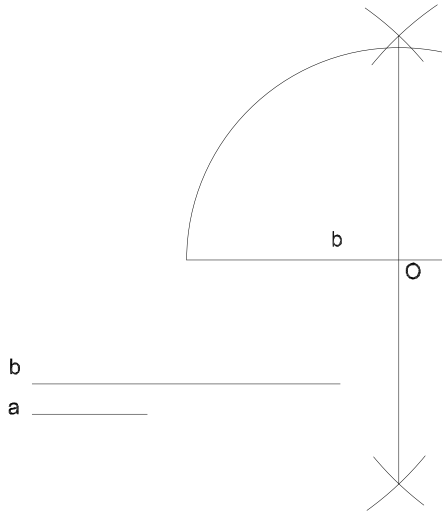
Construcción del segmento media proporcional entre dos segmentos dados.

Dados los segmentos a y b, se denomina media proporcional al segmento c, si cumple que $a/c = c/b$; $a \times b = c^2$. Por tanto $c = \sqrt{(ab)}$. La demostración que esto es cierto se basa en que a-b-hipotenusa1 y b-c-hipotenusa2 son semejantes.

Para ello se colocan los segmentos a y b uno a continuación del otro. Se busca el punto medio de a + b y se traza una circunferencia desde el punto medio y don diámetro a + b. Trazando ahora la perpendicular por la unión entre a y b se obtiene el punto de corte con la circunferencia. Este segmento es c.

La construcción con Autocad 2010:

1. Construir la línea a + b. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Línea. Se trazan las líneas a y b y se copian y colocan una a continuación de otra.
2. Se busca el punto medio mediante la mediatriz (ver punto anterior).
3. Se dibuja la semicircunferencia. Menú: Inicio/Dibujo; Herramienta: Arco con la opción Centro, Inicio y Fin.
4. Se traza la perpendicular en la unión de a y b y se obtiene c al cortar la semicircunferencia.



Construcción de la raíz cuadrada

Si repetimos la media proporcional fijando la longitud de a = 1, entonces c = √b

La circunferencia

Circunferencias: definición y elementos.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro denominado centro.

Lo elementos más importantes son:

Centro (O): es el punto del que equidistan los puntos que forman la circunferencia

Radio (r): es el segmento que une el centro (O) de la circunferencia y un punto cualquiera de ella (OA)

Diámetro (d): son todas las rectas que pasan por el centro de la circunferencia y la cortan en dos puntos (BC). Por ello, el diámetro tiene doble longitud que el radio.

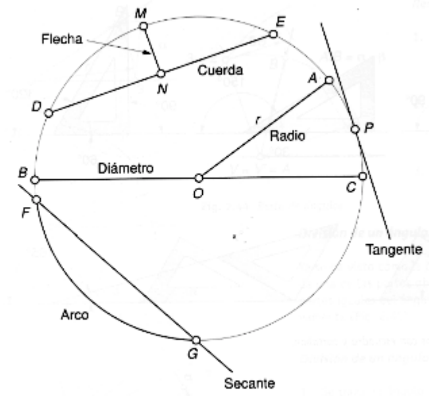
Cuerda (c): es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia (D y E)

Arco (A): es el fragmento de circunferencia comprendido entre dos puntos de ella; por ejemplo, la distancia FG.

Flecha (F): es el segmento de la mediatriz de una cuerda que queda entre la circunferencia y la cuerda (MN)

Secante (S): es la recta que corta a la circunferencia en dos pintos (F y G)

Tangente (T): es la recta que toca a la circunferencia en un solo punto (P), llamado punto de tangencia.



El círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia.

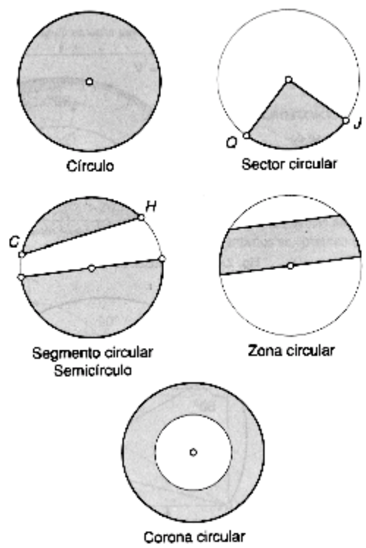
Los elementos del círculo son:

Segmento circular: es la superficie comprendida entre un arco y su cuerda (CH). Si en vez de una cuerda es un diámetro a la superficie, se la denomina semicírculo.

Sector circular: es la superficie comprendida entre dos radios y el arco que pasa por sus extremos, Q y J.

Zona circular: es la parte del círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas y los arcos comprendidos entre ellas.

Corona circular: es la superficie limitada entre la circunferencia y otra concéntrica.

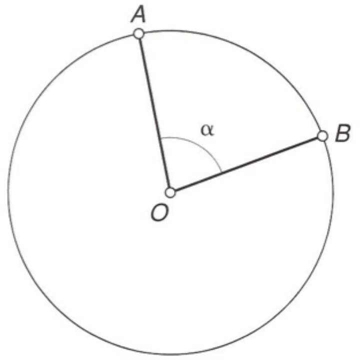


Ángulos respecto de una circunferencia

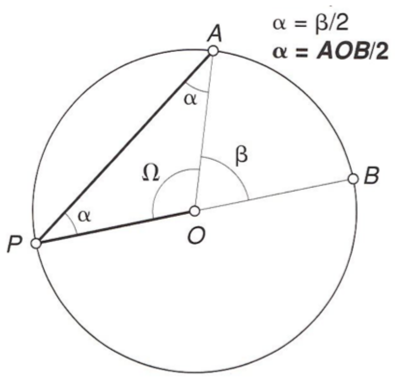
Hay distintos tipos de ángulos relacionados con la circunferencia; según la posición del vértice y los lados.

Central, inscrito, semiinscrito, interior, exterior, circunscrito

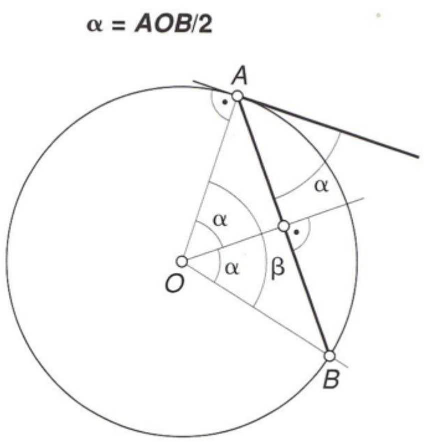
Ángulo central: se denomina con este nombre al ángulo que tiene situado su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios de la misma.



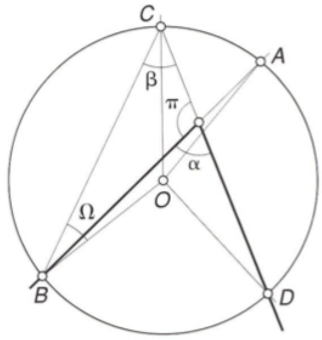
Ángulo inscrito: es el ángulo que tiene su vértice en un punta de la circunferencia y sus lados son interiores a esta. Su valor es la mitad del ángulo central que abarca el mismo área: α = ½ β.



Ángulo semiinscrito: es el ángulo en que uno de sus lados es tangente a la circunferencia. Si se observa, es el caso limite de un ángulo inscrito; par tanto, su valor es igual a la mitad del ángulo central correspondiente al mismo área.

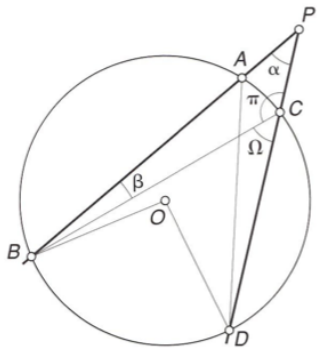


Ángulo interior: es el ángulo cuyo vértice esta situado en el interior de la circunferencia; lógicamente, exceptuando el centro de la misma. El valor de este ángulo es igual a la semisuma de los arcos centrales interceptados por él, y al de su opuesto por el vértice, es decir: α = (BOD)/2 + (COA)/2.



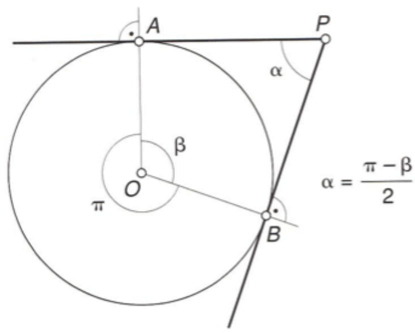
Nota: El ángulo Ω creo que está mal, ya que no debe llegar al segmento BO y debe terminar en BA (es el ángulo CBA).

Ángulo exterior: es el ángulo cuyo vértice es exterior a la circunferencia y los lados del ángulo son secantes a la misma. El valor de este ángulo es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados, es decir: α = (BOD)/2 - (AOC)/2



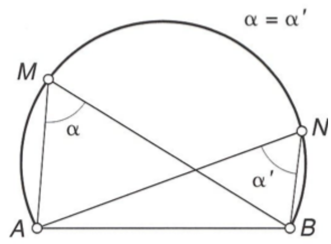
Nota: la figura no muestra el ángulo medio AOC.

Ángulo circunscrito: Es un caso limite del ángulo exterior, los lados del ángulo circunscrito son tangentes a la circunferencia en vez de secantes. Su valor sigue siendo igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados, es decir $\alpha = \pi - \beta/2$.



Arco capaz de un segmento

Arco capaz: es el lugar geométrico de los puntos sobre los que se observa un segmento dado con un ángulo determinado.



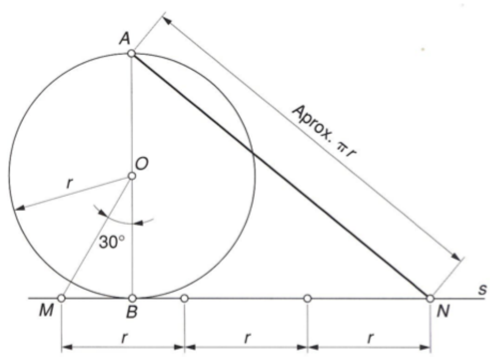
Rectificación de la circunferencia: construcciones de Kochansky y de Mascheroni.

Se denomina rectificación a determinar sobre una recta, mediante un procedimiento gráfico, la longitud de una curva, arco o circunferencia.

Como es sabido la longitud de una circunferencia es 2πr; su representación gráfica es aproximada dado que la función π (3,141592...) es infinita y, por tanto, constituye una imposibilidad para poder operar con regla y compás.

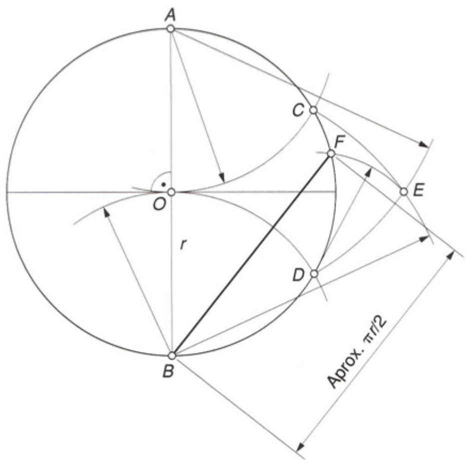
Rectificación de la semicircunferencia (método Kochansky)

1. Se dibuja la circunferencia de centro O y de radio r, y se traza un diámetro AB. En el extremo B se traza una recta r tangente al mismo.
2. A partir de O y sobre el radio OB, se dibuja un ángulo de 30º y, desde el punto M de intersección del lado del ángulo con la tangente trazada anteriormente, se lleva sobre ella, de manera consecutiva, tres veces el radio, obteniendo el punto N.
3. Uniendo A con N se obtiene la rectificación de la semicircunferencia trazada.



Rectificación de un cuadrante. Arco de 90º (método Mascheroni)

1. Se dibuja la circunferencia de centro O y radio r, y se traza un diámetro AB. Con centro en A y B, sucesivamente, y radio OA, se trazan arcos que determinan los puntos C y D sobre la circunferencia.
2. Se hace centro de nuevo en A y B, y radio AD, sucesivamente, se trazan los arcos que determinan el punta E. Can centro en D y radio DE se traza un arco que corta a la circunferencia en el punto F.
3. Se une F can B, y se obtiene el segmento BF que es la magnitud de la rectificación del arco de 90º.



TRIÁNGULOS:

Definición.

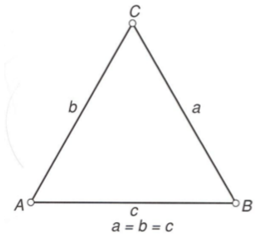
El triángulo es una figura plana y cerrada limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Se denominan **vértices** a los puntos de intersección de las rectas, y los segmentos que los unen se llaman **lados**.

Vértices y ángulos se denominan con letras mayúsculas, la letra que identifica a los ángulos lleva sobre ella un pequeño símbolo a modo de sombrero. Los **lados** opuestos a los ángulos tienen la mismas letras que éstos, sólo que en minúsculas.

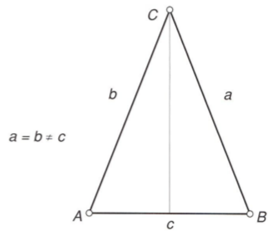
Clasificación.

1. Según la longitud de sus lados:

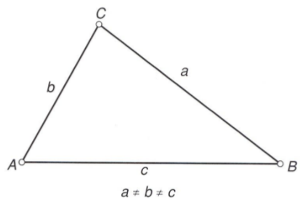
Equilátero. Los tres lados son iguales



Isósceles. Dos lados son iguales

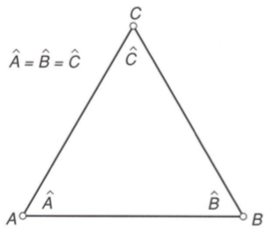


Escaleno. Todos los lados son desiguales

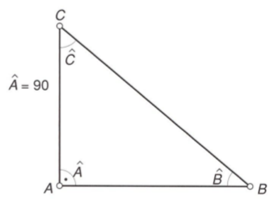


2. Según el valor de sus ángulos:

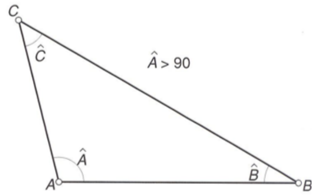
Equiángulo. Los tres ángulos son iguales



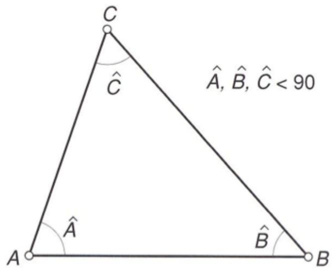
Rectángulo. Uno de sus ángulos es recto



Obtusángulo. Tiene un ángulo obtuso



Acutángulo. Sus tres ángulos son agudos



Cevianas.

Se llama **ceviana** de un triángulo a toda recta que pasa por uno de sus vértices. De las infinitas cevianas se destacan:

Medianas: son las tres rectas que unen los tres vértices con el punto medio del lado opuesto.

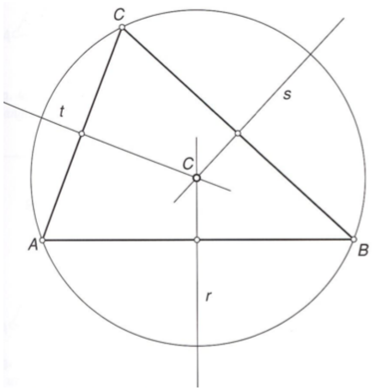
Bisectrices: son las tres rectas que dividen a los tres ángulos en dos partes iguales

Alturas: son las tres rectas perpendiculares a cada lado que pasan por el vértice opuesto.

Puntos notables de un triángulo: Circuncentro. Incentro. Baricentro. Ortocentro. Exicentro.

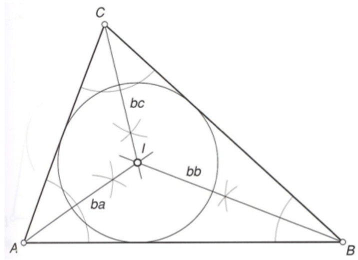
Mediatriz y circuncentro

Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados trazadas en su punto medio. Las mediatrices se cortan en un punto denominado **circuncentro**. Es te punto es además el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



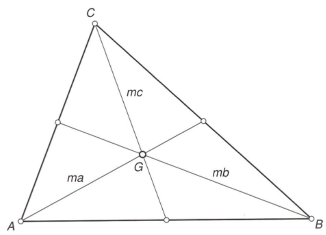
Bisectriz e incentro

Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que pasando por los vértices de los ángulos del triángulo dividen a cada uno de ellos en dos ángulos iguales, y se cortan en un punto llamado **incentro**. Este punto es además el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



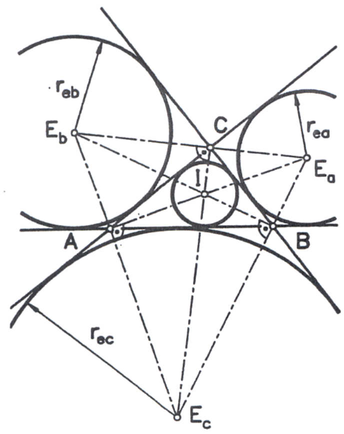
Medianas y baricentro

Las **medianas** de un triángulo son las rectas que unen cada vértice de él con el punto medio del lado opuesto. El punto donde se cortan estas rectas se llama **baricentro**.



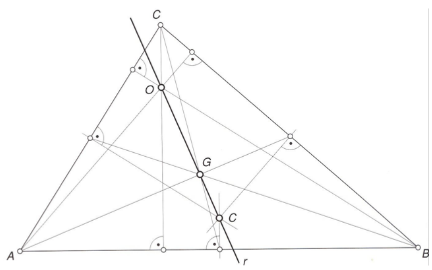
Circunferencias exinscritas y exincentro

Las circunferencias tangentes a cada uno de los lados de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos se denominan **circunferencias exinscritas** y sus respetivos centros **exincentros**.



Recta de Euler

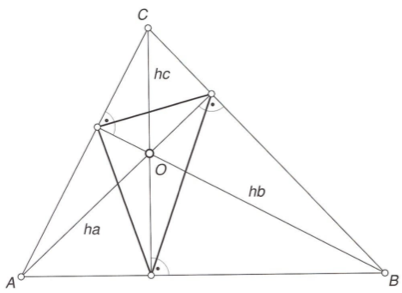
Se verifica que en cualquier triángulo **el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados**. La recta que une estos tres puntos se denomina **recta de Euler**.



Triángulo órtico o pedal de un triángulo.

Alturas y ortocentro

Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice al lado opuesto del mismo. El punto donde se cortan estas rectas se llama **ortocentro**. Al unir los pies de las alturas, el triángulo que resulta se denomina **triángulo órtico o triángulo pedal**.



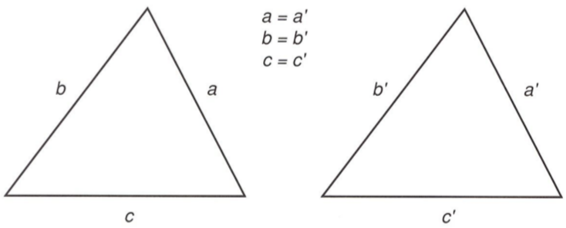
Teorema de Nagel.

Las rectas que unen los vértices de un triángulo con el circuncentro son perpendiculares a los lados del correspondiente triángulo órtico.

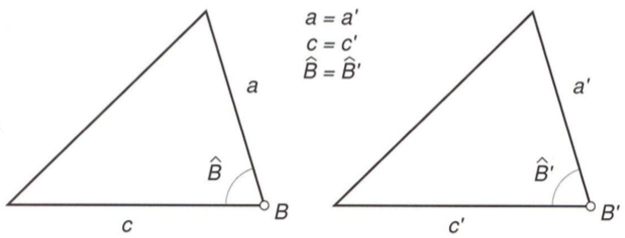
Igualdad y semejanza de triángulos.

Dos triángulos son **iguales** si se cumple una de las siguientes condiciones:

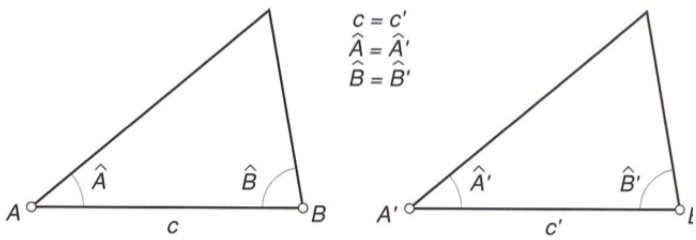
- Cuando tienen los tres lados iguales



- Cuando tienen iguales dos lados y el ángulo que ambos forman

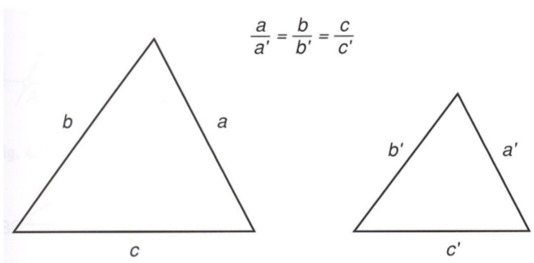


- Cuando tienen iguales dos ángulos y un lado

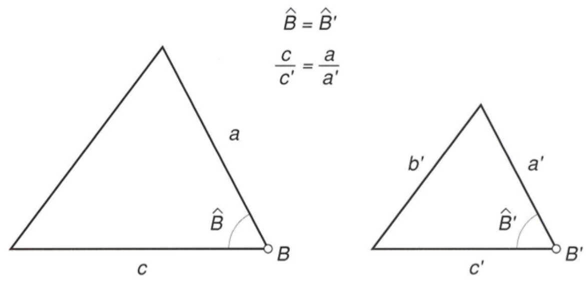


Dos triángulos son **semejantes** si se cumple una de las siguientes condiciones:

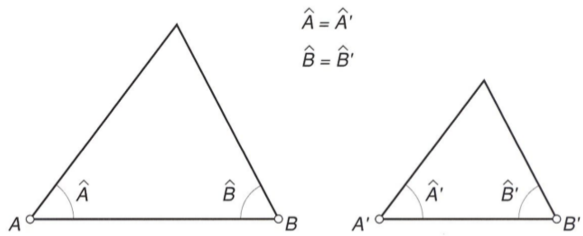
- Cuando tienen los lados proporcionales.



- Cuando tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo determinan.



- Cuando tienen dos ángulos iguales.

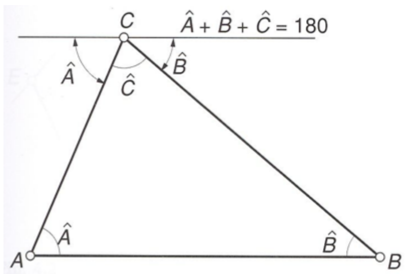


Propiedades fundamentales de los triángulos.

Los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180º.

Los ángulos exteriores de un triángulo siempre suman 360º.

Todo ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.



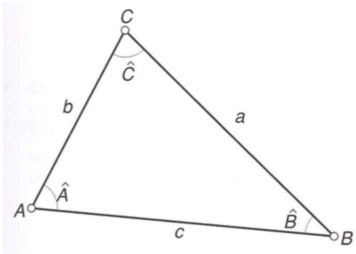
Como consecuencia de este hecho:

- un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso o un ángulo recto
- en un triángulo rectángulo los dos ángulos agudos son complementarios.

Si los lados y ángulos de un triángulo son iguales éste es regular, y se le denomina triángulo equilátero.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que cada uno de sus catetos.

Cualquiera de los lados de un triángulo es menor que la suma de los dos restantes, pero mayor que su diferencia, por ejemplo $a<b+c$; $a>b-c$.



Aplicaciones.

Existe una regla nemotécnica para saber qué tipo de centro se obtenía con qué tipo de intersecciones. La regla está basada en dos palabras fáciles de recordar: MAMBo y BOCIna (las letras mayúsculas son las que sirven para aplicar la regla):

M edianas	**B aricentro**
A lturas	**O rtocentro**
M ediatrices	**C ircuncentro**
B isectrices	**I ncentro**
o	na

Más información en http://blog.sangakoo.com/divulgacion/triangulos/

CUADRILÁTEROS

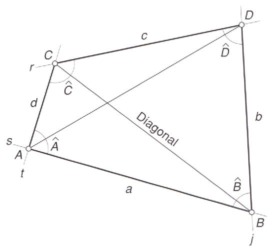
Definiciones y clasificación

Un cuadrilátero es una figura plana y cerrada limitada por cuatro rectas que se cortan dos a dos. Se denominan **vértices** a los puntos de intersección de las rectas, y los segmentos que los unen se llaman **lados**. Por tanto, se trata de polígonos que constan de cuatro lados y cuatro vértices.

De igual modo que en el triángulo, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas.

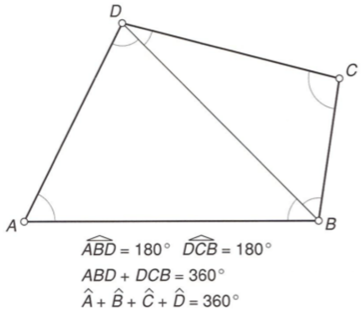
Se conoce como diagonal de un cuadrilátero la recta que une dos vértices no consecutivos. Los cuadriláteros poseen dos diagonales que los dividen en dos triángulos.

Por tanto, un cuadrilátero esta compuesto por los siguientes elementos: **cuatro lados, cuatro vértices, cuatro ángulos y dos diagonales**.

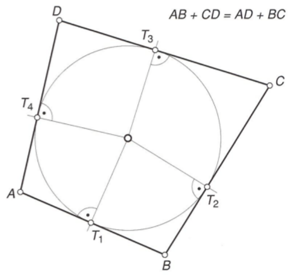


Propiedades.

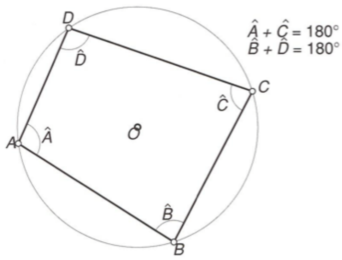
1. Los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre suman 360º.



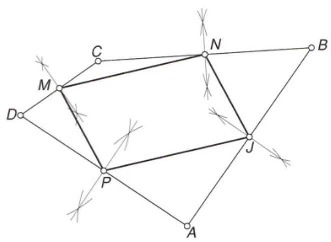
2. Cuando la suma de los lados opuestos de un cuadrilátero coinciden, este puede circunscribir a una circunferencia, es decir es **circunscriptible**.



3. Cuando los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, éste se puede inscribir en una circunferencia, es decir, es **inscriptible**.



4. Si se unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, se obtiene un paralelogramo.



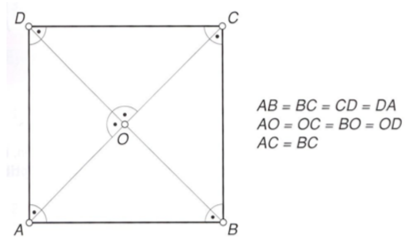
Clasificación.

Teniendo en cuenta el paralelismo de los lados de un cuadrilátero, éstos pueden clasificarse en: **paralelogramos, trapecios y trapezoides**.

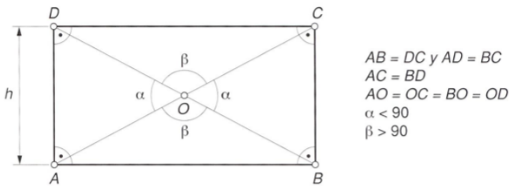
Paralelogramos. Los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus lados paralelos dos a dos.

Se clasifican a su vez en:

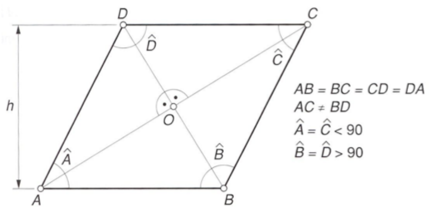
- Cuadrado: sus lados son iguales y paralelos dos a dos. Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, perpendiculares, y se cortan en el punto medio, es decir se bisecan, formando ángulos de 90º.



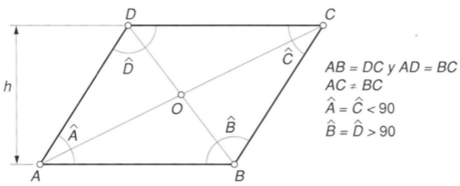
- Rectángulo: sus lados paralelos son iguales entre sí. Todos sus ángulos son rectos. Sus diagonales son iguales, pero no perpendiculares y al bisecarse forman ángulos diferentes a 90º.



- **Rombo**: los lados son iguales y paralelos dos a dos. Sus ángulos no son rectos, y los que son opuestos, es decir, los que están uno enfrente de otro, son iguales. Sus diagonales son desiguales, perpendiculares, y al bisecarse forman ángulos de 90º.

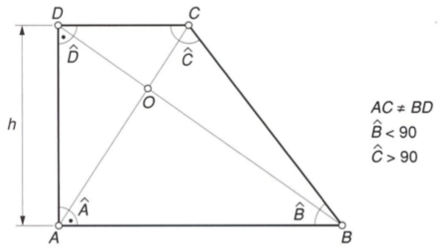


- **Romboide**: los lados paralelos son iguales entre sí. Sus ángulos no son rectos, y los ángulos opuestos son iguales. Sus diagonales son desiguales, oblicuas y se bisecan formando ángulos diferentes a 90º.

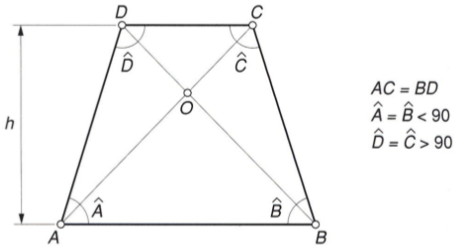


Trapecios. Los trapecios son cuadriláteros que tienen dos lados paralelos, a los que se les denomina bases del trapecio. Se clasifican del modo siguiente:

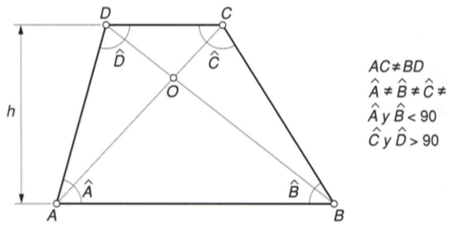
- **Trapecio rectángulo**: dos de sus lados son paralelos y dos ángulos rectos. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.



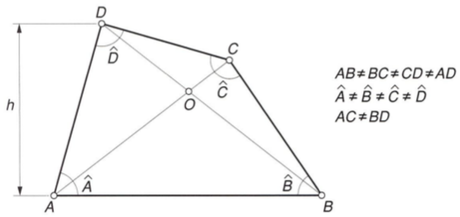
- **Trapecio isósceles**: dos de sus lados son paralelos y sus ángulos iguales dos a dos. Las diagonales son iguales, oblicuas y no se bisecan.



- **Trapecio escaleno**: dos de sus lados son paralelos y sus ángulos son desiguales. Las diagonales son desiguales, oblicuas y no se bisecan.



Trapezoides. Los trapezoides son cuadriláteros que no tienen lados paralelos, y tanto sus lados como sus ángulos son desiguales.



Construcción de cuadrados, rectángulos, rombos, romboides, trapecios y trapezoides.

Si aplicamos la formula $2n - 3 = N$ (donde n es el número de lados), los datos necesarios para poder construir un cuadrilátero serán: $2 \times 4 - 3 = 5$ datos. Sin embargo, en el caso del cuadrado basta con saber el valor del lado, o el de la diagonal, para poder construirlo; esto es debido a que al tener lados y ángulos iguales basta sólo un dato.

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

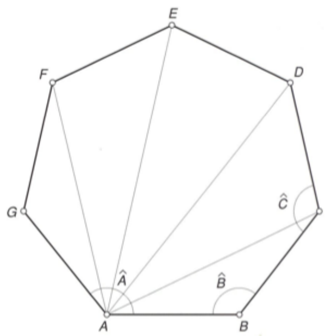
Definiciones y clasificación

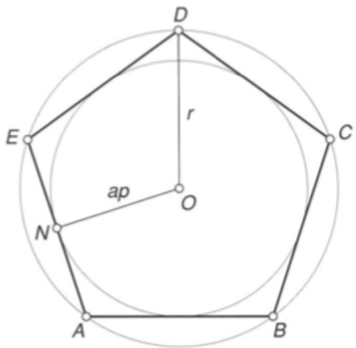
Un polígono regular es una figura plana delimitada por un número n de lados que tiene todos los lados y todos los ángulos iguales.

Según el número de lados se denominan del modo siguiente: **triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, hexágono, heptágono y octógono**.

Notación.

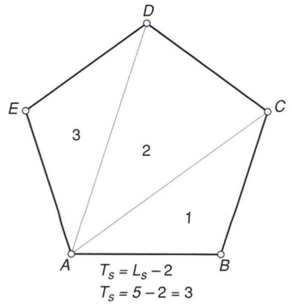
- **Vértices**: A, B, C, D, E ....
- **Lados**: AB, CD, EF, MN
- **Ángulos**: Â, …
- **Diagonales**: Son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Como puede constatarse, el triángulo equilátero no posee ninguna diagonal, y el cuadrado y el pentágono son los únicos polígonos regulares que tienen sus diagonales iguales; en los demás polígonos no todas sus diagonales son iguales.
- **Centro del polígono**: Es el punto interior del polígono (O) que equidista de todos sus vértices. Por consiguiente, el segmento que une el centro con cualquiera de los vértices coincide con el radio de la circunferencia circunscrita a él.
- **Apotemas**: son los segmento (ON o ap) que unen el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado. Por tanto, la apotema coincide con el radio de la circunferencia inscrita a dicho polígono.



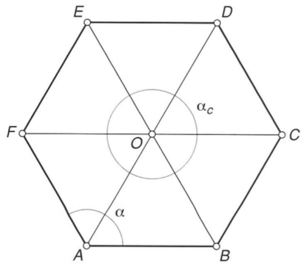


Propiedades

1. Un polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos.



2. La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual al producto de 180º por el número de lados menos dos.

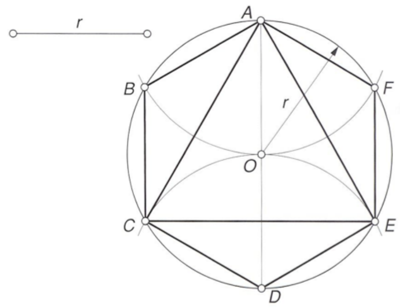


3. La suma de los ángulos externos de un polígono es de 360º.
4. El número de diagonales (Nd) de un polígono viene dado por la siguiente fórmula: Nd = (n - 3) x n/2 siendo n el número de lados del polígono.
5. El ángulo central de un polígono regular se obtiene al dividir 360º entre el número de lados que lo componen.

Triángulo y Hexágono, cuadrado y octógono.

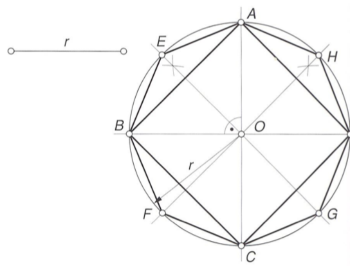
Triángulo equilátero y hexágono. División de la circunferencia en 3 y 6 partes iguales.

1. El hexágono es el único polígono regular en el que se cumple la igualdad de su lado y del radio de la circunferencia circunscrita a él. Esto facilita su construcción, puesto que si conocemos el valor del lado o del radio que lo circunscribe, podremos construirlo siempre del mismo modo.
2. Se traza una circunferencia con radio r = OA, Y un diámetro cualquiera, AD.
3. Con centro en los puntos A y D, y radios AO y DO se describen dos arcos, respectivamente, que cortan a la circunferencia en los puntos B, F, y E, C. Al unir estos puntos entre sí, obtenemos el **hexágono regular**.
4. Si los puntos anteriormente definidos se unen de manera alterna, es decir, uno sí y otro no, se obtiene el **triángulo equilátero**.



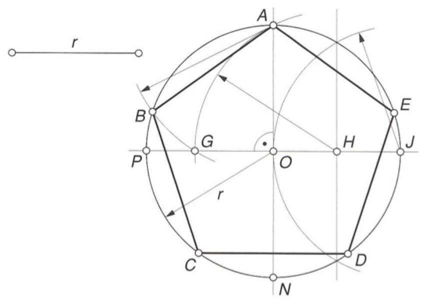
Cuadrado y octógono. División de la circunferencia en 4 y 8 partes iguales.

1. Se dibuja la circunferencia con el radio r dado y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, obteniendo, al cortar éstos a la circunferencia, los vértices del polígono A, B, C y D. Uniendo dichos puntos se determina el cuadrado.
2. Para construir el octógono regular se trazan las bisectrices de los dos diámetros perpendiculares, que cortan a la circunferencia en cuatro puntos, que unidos junto a los vértices del cuadrado se obtiene el octógono.



Lado del pentágono inscrito en una circunferencia. Construcción.

1. Se traza la circunferencia con el radio r dado, y se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, AN y PJ. Se hace centro en H, punto medio de OJ, y radio HA, se describe un arco AG.
2. El segmento AG es el lado del pentágono.
3. A partir del punto A, y con radio AG, se sitúa sobre la circunferencia el valor del lado, determinando así los vértices B, C, D y E, vértices del polígono. Uniendo éstos correlativamente se obtiene el pentágono regular.



Lado del decágono inscrito en una circunferencia. Construcción.

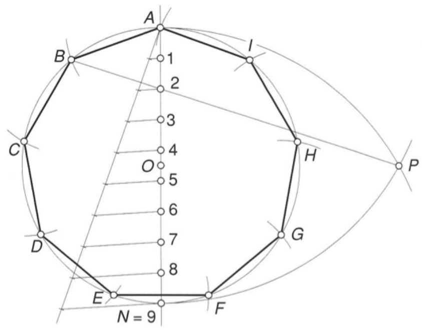
Construcción del pentadecágono.

Inscripción aproximada de otros polígonos regulares.

Polígono de n lados inscrito en una circunferencia. Construcción.

Como ejemplo vamos a dividir la circunferencia en nueve partes para construir un eneágono regular.

1. Se dibuja la circunferencia con el radio dado y se traza en ella el diámetro AN el cual se divide en tantas partes iguales como lados ha de tener el polígono pedido; en este caso, en nueve.
2. Haciendo centro en A, y posteriormente en N, con radio AN se describen dos arcos que se cortarán en el punto P.
3. Se une P con la división 2 del diámetro hasta cortar a la circunferencia en el punto B. El segmento AB será aproximadamente el lado del polígono buscado.
4. Por tanto, a partir de A llevamos el valor de AB sobre la circunferencia tantas veces como lados tenga el polígono propuesto determinando así los vértices del polígono A, B, C, D, etc. Para conseguir finalmente el polígono sólo será necesario unir los vértices antes determinados.



CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES DADO EL LADO

Casos particulares.

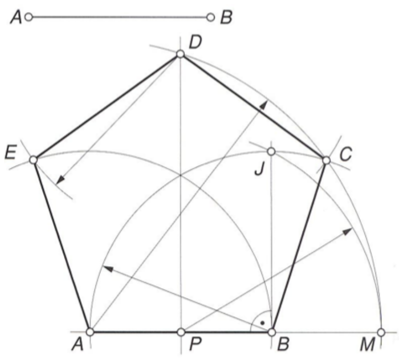
Triángulo.

Cuadrado.

Pentágono.

Construcción de un pentágono regular conociendo el lado

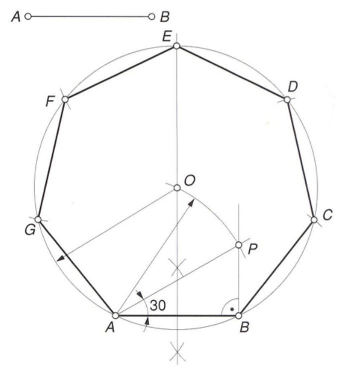
1. Se traza el lado dado AB y se halla su mediatriz, obteniendo el punto P. Se levanta una perpendicular en B, y haciendo centro en dicho punto, con radio BA, se traza un arco que determina el punto J al cortar a la perpendicular trazada antes.
2. Con radio PJ y centro en P se dibuja un arco que corta en el punto M a la prolongación de AB. Con centro en A y radio AM se dibuja un arco que determina sobre la mediatriz el punto D.
3. Por último, trazamos arcos con centros en D, A y B y radio igual al lado AB. Estos arcos, al cortarse entre sí, determinan los puntos C y E, vértices del polígono. Uniendo los puntos C, D y E con los extremos A y B se obtiene el **pentágono regular**.



Hexágono.

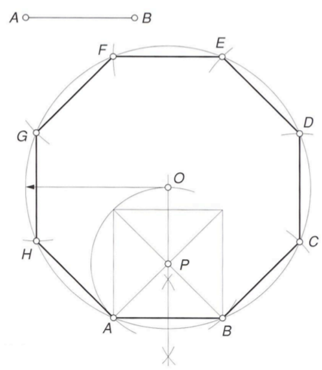
Heptágono.

1. Se sitúa el lado AB y se traza una perpendicular por uno de sus extremos, por ejemplo el B. Se dibuja también la mediatriz de este lado, y en el extremo A y sobre AB se construye un ángulo de 30º, prolongando el lado hasta que corte a la perpendicular trazada por B en el punto P.
2. Con centro en A y radio AP se describe un arco que corta a la mediatriz de AB en el punto O, centro de la circunferencia circunscrita al heptágono cuyo radio es el segmento OA u OB.
3. Sobre la circunferencia se traslada el valor del lado AB siete veces, obteniendo los vértices C, D, E, F y G. Uniendo los mencionados puntos se determina el **heptágono regular**.



Octógono.

1. Con la magnitud AB, lado del octógono, se construye un cuadrado con este valor de lado. Se trazan sus diagonales para así determinar el punto P, centro de este cuadrado. Con centro en P y radio PA se traza un arco que corta en O a la mediatriz de AB.
2. El punto O es el centro de la circunferencia circunscrita al octógono y cuyo radio es el segmento OA u OB. Sobre esta circunferencia se traslada el valor del lado AB ocho veces, así que resultan los vértices C, D, E, F, G y H.
3. Uniendo estos puntos se determina el **octógono regular**.

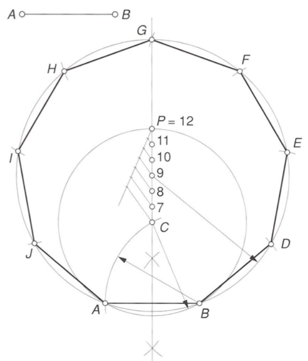


Caso general.

Para estudiar los diferentes procesos de este método vamos a tomar como ejemplo la construcción de un eneágono regular de lado AB.

1. Se halla la mediatriz del segmento AB. Con centro en A y radio AB se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto C (observa que el punto C es el centro del hexágono regular de lado AB). Sobre esta recta van a estar situados los centros de las circunferencias de los polígonos.
2. Con centro en C y radio AC se traza una circunferencia, y, donde ésta corta a la mediatriz, se obtiene el punto P.
3. El radio CP se divide en seis partes iguales. Hallamos así los puntos 7, 8, 9, 10, 11 y 12. Cada uno de ellos constituye el centro de la circunferencia circunscrita a los polígonos regulares de 7, 8, 9... lados.

4. En nuestro caso, el centro es el punto 9, y el radio, la magnitud A9. Trazamos la circunferencia y, a partir de A, llevamos el valor AB sobre ella tantas veces como lados tenga el polígono propuesto.
5. Finalmente, se unen los vértices determinados para construir el polígono.



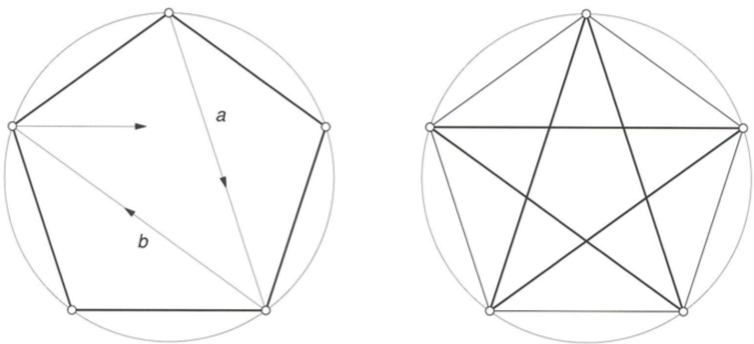
Construcción aproximada de otros polígonos regulares.

Polígonos regulares estrellados

Definiciones

Son polígonos cóncavos que tienen forma de estrella, y resultan de trazar en una circunferencia todas las cuerdas de longitud constante cuyos extremos sean vértices no consecutivos del polígono regular convexo inscrito en ella.

Para dibujarlo debemos obtener sobre una circunferencia los vértices de sus puntas, que son los mismos que los de un polígono regular convexo, pero en vez de unirlos de forma consecutiva se hace a intervalos constantes hasta pasar por todos ellos.



Propiedades

Decimos de los polígonos estrellados regulares que tienen **número, genero, paso y especie.**

- **Número (n):** es la cantidad de puntas que tiene el polígono.
- **Genero (g):** es el número de cuerdas empleadas para el trazado del polígono. Este número coincide con el de lados del polígono regular convexo inscrito en la circunferencia.

- **Especie (e):** es el número de vueltas que hay que dar a la circunferencia para completar el polígono.
- **Paso (p):** es el número de lados que comprende cada cuerda del polígono regular convexo inscrito en ella.

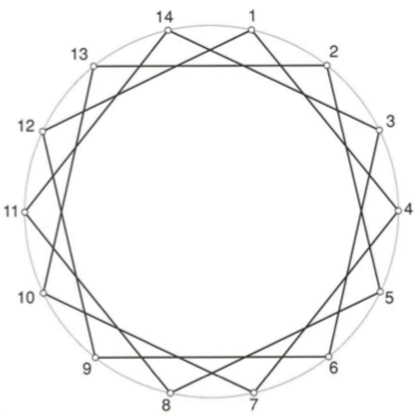
Por tanto, el **número** es igual al **genero**, y la **especie** siempre coincide con el **paso**.

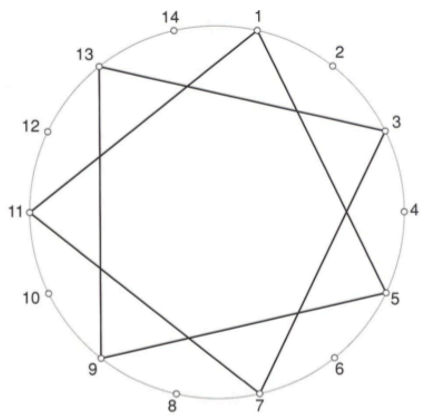
Construcción de polígonos regulares estrellados.

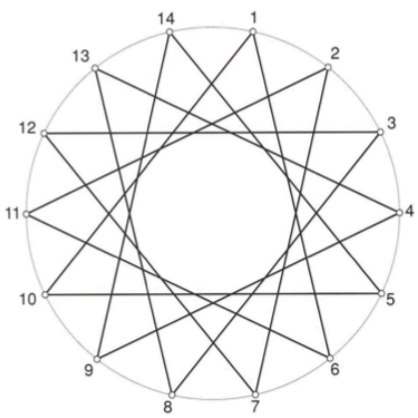
Con cada polígono regular convexo se puede dibujar un número determinado de polígonos estrellados, que pueden coincidir en el número de puntas o no. Para calcularlo se divide el número de lados del polígono regular convexo entre dos, y los valores menores del resultado, que no sean divisores del número de lados del polígono regular convexo, indicarán el paso de los polígonos estrellados regulares que se pueden construir.

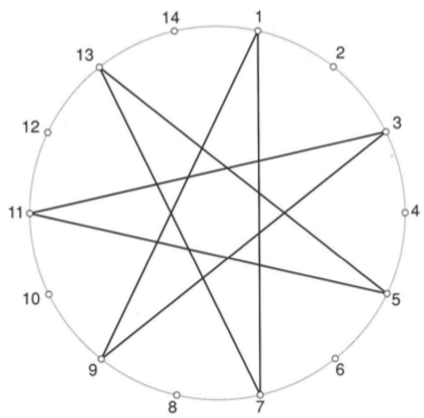
Por ejemplo:

Si partimos de un polígono regular convexo de catorce lados, y le aplicamos lo que se acaba de exponer, observamos que n/2, en este caso, son 7; por tanto, se podrán dibujar cuatro polígonos estrellados, ya que los valores no divisores de 14 menores de 7 son: 3, 4, 5 y 6. Así, tendremos una estrella de catorce puntas de paso 3, una de siete puntas de paso 4, otra de catorce puntas de paso 5 y una de siete puntas de paso seis.









Construcción de un polígono estrellado conociendo el lado

La solución a esta propuesta pasa por construir un polígono estrellado con una magnitud de lado cualquiera, el cual servirá de base para, aplicándole el concepto de semejanza, poder de este modo hallar el polígono pedido. Veamos un ejemplo:

Supongamos que queremos construir un polígono estrellado regular de cinco puntas de lado l = AB.

Se parte de una circunferencia de centro O y radio r cualquiera dividida en tantas partes iguales como puntas tenga el polígono estrellado. Se construye dicho polígono F, G, H, J y K, que tendrá un valor de lado que, generalmente,no corresponda con el dado.

Se establece una homotecia de centro O. Para ello, se une O con F, G, H, J y K y se alargan dichos radios. Se prolonga uno de los lados del polígono construido, por ejemplo FJ, y a partir del punto F se lleva el valor del lado AB del polígono pedido, obteniéndose el segmento FP.

Por P se traza una recta paralela al radio OF que corta a la prolongación del radio OJ en el punto A. Por dicho punto se traza una circunferencia concéntrica que corta a las prolongaciones de los radios en los puntos B, C, D y E.

Uniendo estos puntos de manera adecuada se construye el polígono regular estrellado pedido.