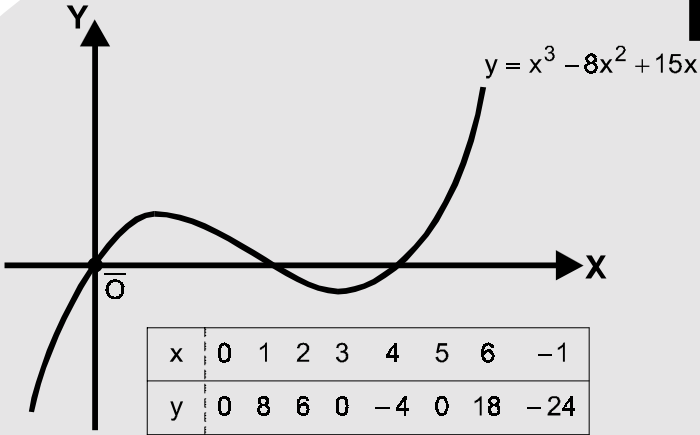


Capítulo 2



GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Discutir y graficar las curvas, cuyas ecuaciones son:

11 $16x^2 - y = 0$

Solución:

$$E(x,y): 16x^2 - y = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

1º. Intercepciones con los ejes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow 16x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{O} = (0,0)$$

2º. Simetría:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje X: } E(x,-y) \neq E(x,y) \\ \text{Eje Y: } E(-x,y) = E(x,y) \\ \text{Origen: } E(-x,-y) \neq E(x,y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Curva simétrica sólo} \\ \text{con el eje X} \end{array}$$

3º. Extensión:

De ①: $y = 16x^2; \forall x \in \mathbb{R}$

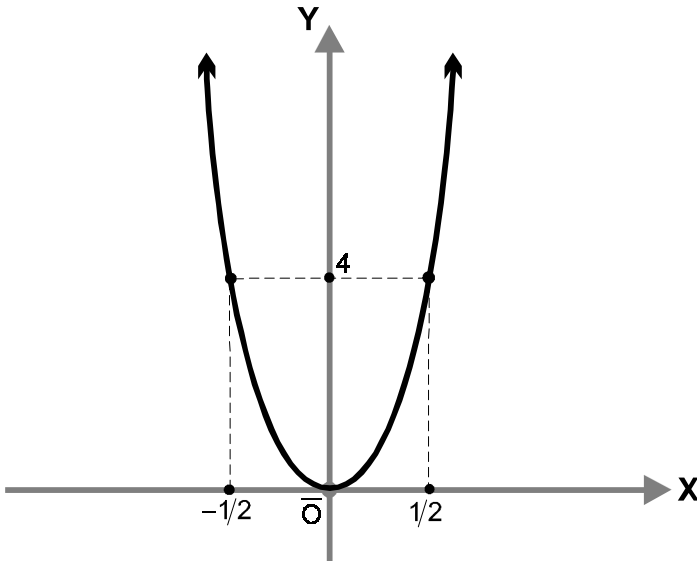
4º. Asíntotas:

No tiene asíntotas, ni horizontales ni verticales.

5º. Cuadro de valores:

x	0	1	-1	1/2	-1/2	...
y	0	16	16	4	4	...

6º. Gráfico:



12 $xy - 2x - 1 = 0$

Solución:

$$E(x,y): xy - 2x - 1 = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $y = 0 \Rightarrow x = -1/2; \bar{A} = (-1/2, 0)$

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow \emptyset$ intercepción con el eje X

2º. Simetría:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje X: } E(x,-y) \neq E(x,y) \\ \text{Eje Y: } E(-x,y) \neq E(x,y) \\ \text{Origen: } E(-x,-y) \neq E(x,y) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Curva no simétrica ni con} \\ \text{los ejes ni con el origen} \end{array}$$

3º. Extensión:

De $\textcircled{1}$:

$$xy - 2x - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1+2x}{x}; \forall x \neq 0$$

4º. Asíntotas:

De $\textcircled{1}$:

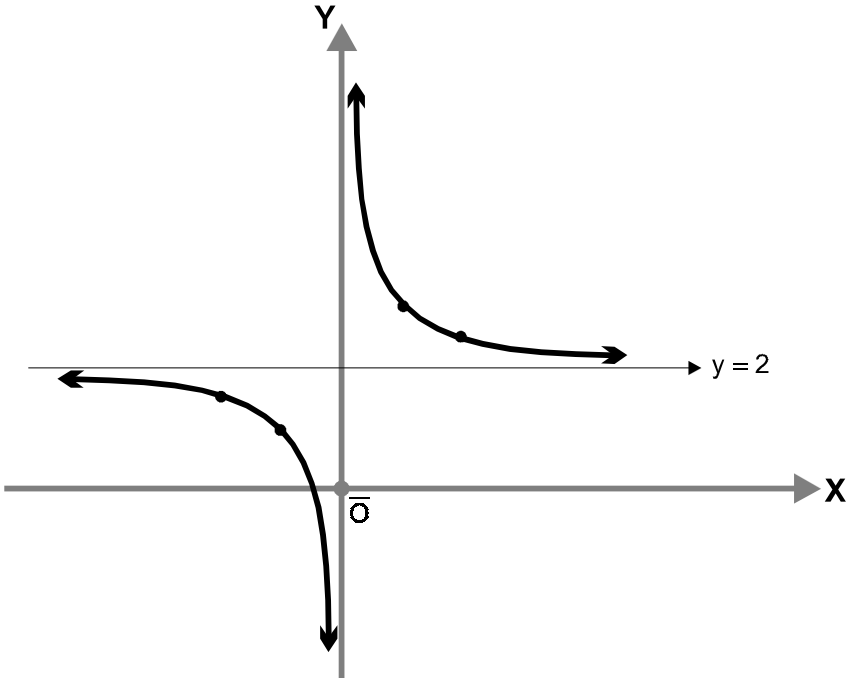
◦ $y = \frac{1+2x}{x} \Rightarrow x = 0$

◦ $x = \frac{1}{y-2}; y-2=0 \Rightarrow y = 2$

5º. Cuadro de valores:

x	1	2	-1	-2	...
y	3	5/2	1	3/2	...

6º. Gráfico:



13 $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$

Solución:

$E(x,y): x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0 \longrightarrow \textcircled{1}$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $y = 0 \Rightarrow x = -1.6; \bar{A} = (-1.6, 0)$

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 2; \bar{B} = (0, 2)$

2º. Simetría:

Eje X:	$E(x, -y) \neq E(x, y)$	}	Curva no simétrica ni con los ejes ni con el origen
Eje Y:	$E(-x, y) \neq E(x, y)$		
Origen:	$E(-x, -y) \neq E(x, y)$		

3º. Extensión:

De ①:

$$y = 2 \pm \sqrt{-x^3}; \quad \forall x \leq 0$$

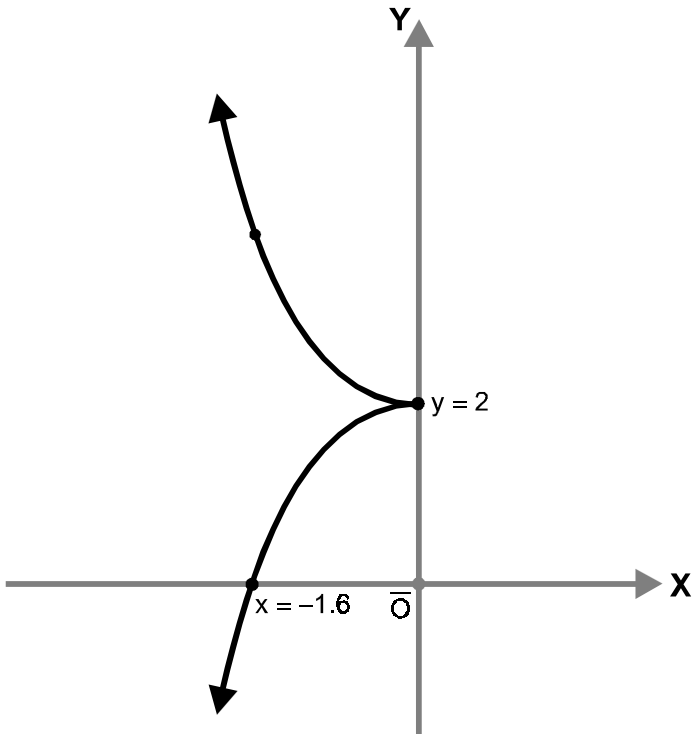
4º. Asíntotas:

No tiene asíntotas, ni horizontales ni verticales.

5º. Cuadro de valores:

x	0	-8/5	-1	-2	...
y	2	0	13/10	24/5, -4/5	...

6º. Gráfico:



14 $y^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$E(x,y): y^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \longrightarrow \textcircled{1}$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1; \bar{A} = (\pm 1, 0)$

Eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1/2; \bar{B} = (0, \pm 1/2)$

2º. Simetría:

Curva simétrica con los ejes y con el origen.

3º. Extensión:

De $\textcircled{1}$:

$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}} \quad \forall x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup [-1, 1] \cup \langle 2, +\infty \rangle$

4º. Asíntotas:

De $\textcircled{1}$:

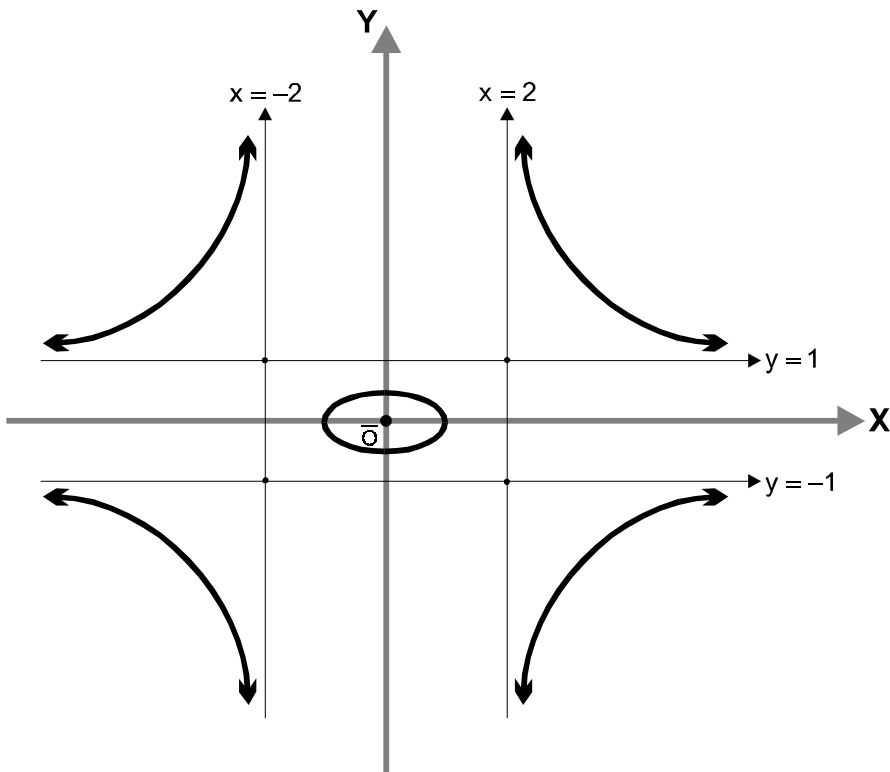
◦ $y = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

◦ $x = \pm \sqrt{\frac{4y^2 - 1}{y^2 - 1}} \Rightarrow \sqrt{y^2 - 1} = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

5º. Cuadro de valores:

x	1	-1	0	± 3	± 4	$\pm 1/2$...
y	0	0	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 11/10$	$\pm 24/5$...

6º. Gráfico:



15 $y(x^2 + 1) = 4$

Solución:

$$E(x,y): y(x^2 + 1) = 4 \longrightarrow \textcircled{1}$$

1º. Intercepciones con los ejes:

Eje X: $y = 0 \rightarrow \emptyset$ intercepción con el eje X

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4; \bar{A} = (0,4)$

2º. Simetría:

Curva simétrica sólo con el eje Y.

3º. Extensión:

De ①:

$$y = \frac{4}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 0; \quad \forall x \in \mathbb{U}$$

4º. Asíntotas:

De ①:

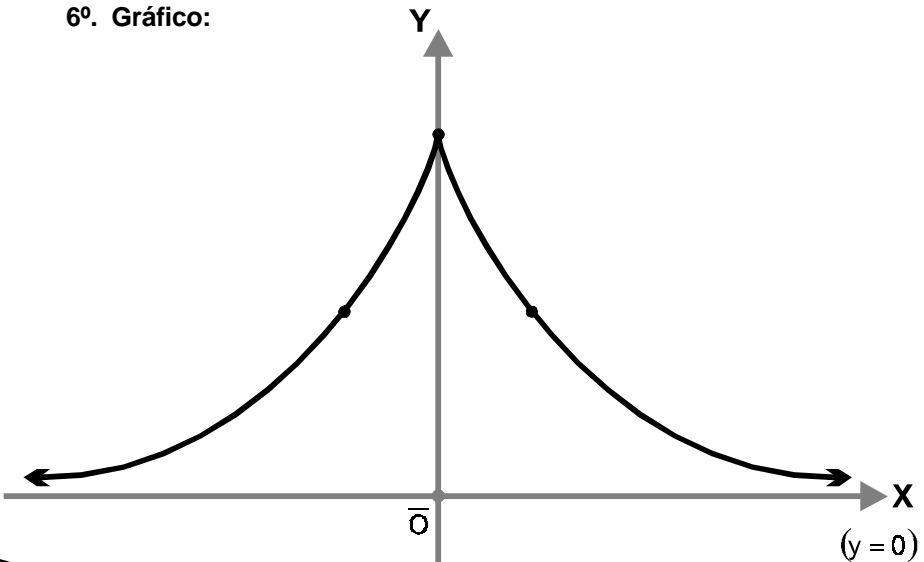
$$\circ \quad y = \frac{4}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{U}$$

$$\circ \quad x = \pm \sqrt{\frac{4-y}{y}} \Rightarrow \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (\text{Eje } X)$$

5º. Cuadro de valores:

x	0	±1	±2	±3	...
y	4	2	4/5	2/5	...

6º. Gráfico:



- 16** Una recta pasa por los dos puntos $\bar{A} = (-2, -3)$ y $\bar{B} = (4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta. ¿Cuál es su ordenada?

Solución:

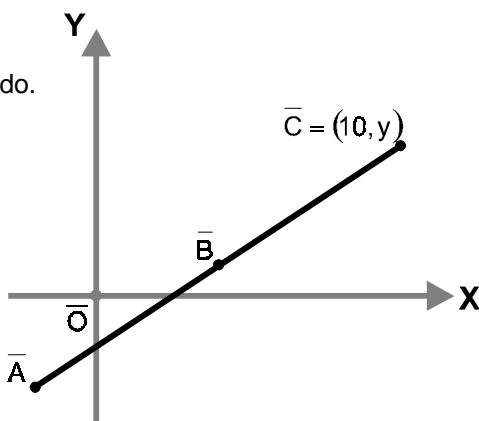
Sea $\bar{C} = (10, y)$ el punto pedido.

Dado que: $|AB| + |BC| = |AC|$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sqrt{36+16} + \sqrt{36+(y-1)^2} &= \\ &= \sqrt{(10+2)^2 + (y+3)^2} \end{aligned}$$

Efectuando operaciones:

$$\rightarrow \boxed{y = 5}$$



- 17** Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $\bar{A} = (2, -2)$ y $\bar{B} = (4, 1)$ es siempre igual a 12.

Solución:

Sea $\bar{P} = (x, y)$ el punto pedido.

Entonces de la condición del problema tenemos:

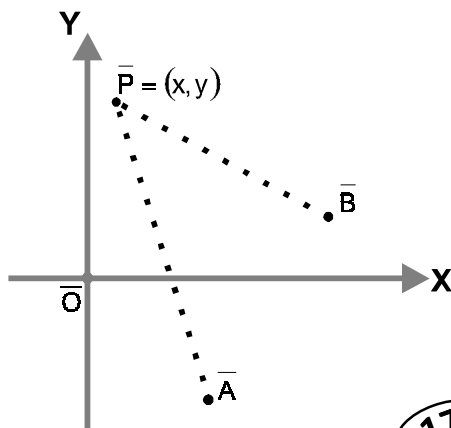
$$\circ |BP|^2 - |AP|^2 = 12$$

De donde:

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \right)^2 - \\ - \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \right)^2 = 12 \end{aligned}$$

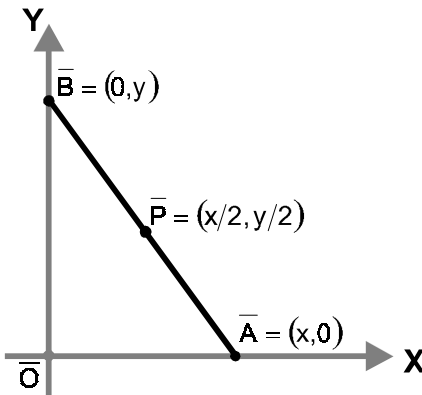
Luego, efectuando operaciones:

$$\rightarrow \boxed{4x + 6y + 3 = 0}$$



- 18** Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje X y el otro permanece siempre sobre el eje Y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

Solución:



De la condición :

$$\circ \quad |PA| + |PB| = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{(x - x/2)^2 + (-y/2)^2} + \sqrt{(x/2)^2 + (y/2 - y)^2} = 4$$

Efectuando operaciones :

$$\rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 16}$$

- 19** Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $\bar{P} = (x, y)$, tal que la distancia de \bar{P} al punto $\bar{A} = (0, 6)$ es igual a la mitad de la distancia de \bar{P} al eje X.

Solución:

De la condición :

$$\circ \quad |AP| = \frac{1}{2}y \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y - 6)^2} = \frac{1}{2}y$$

Luego, efectuando operaciones :

$$\rightarrow \boxed{4x^2 + 3y^2 - 48y + 144 = 0}$$

