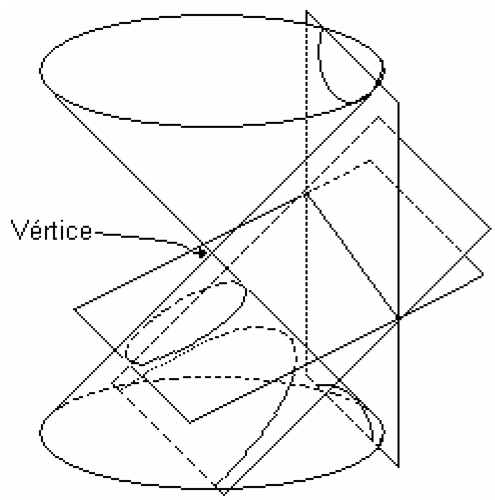
VII. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

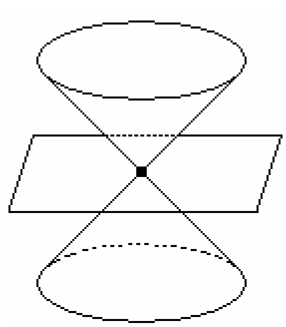
7.1. SECCIONES CÓNICAS

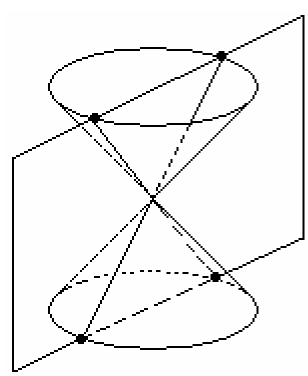
Cuando un plano corta a un cono circular recto de dos mantos, la sección que resulta de dicho corte determina ciertas curvas llamadas CÓNICAS.

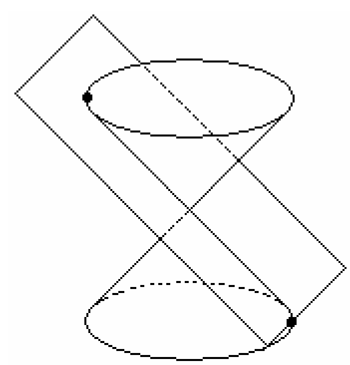
- Si el plano que corta no pasa por el vértice del cono, la sección que resulta es una elipse (o una circunferencia), una parábola o una hipérbola y reciben el nombre de cónicas regulares.



- Si el plano que corta pasa por el vértice del cono, la sección resultante puede consistir en un punto, dos rectas que se cortan, dos rectas coincidentes o una curva imaginaria y reciben el nombre de cónicas degeneradas.







7.2. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO (EN DOS VARIABLES)

En la sección 6.2 se mencionó que una ecuación algebraica de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se llama ecuación general de segundo grado, donde los coeficientes A, B y C no sean simultáneamente cero. Esta ecuación se toma generalmente como la definición analítica de CÓNICA.

7.3. CRITERIOS PARA IDENTIFICAR A LA CÓNICA QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

a) Si en la ecuación general de segundo grado, el coeficiente $B = 0$ la ecuación resultante $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa un lugar geométrico que siempre es una cónica (si no es degenerada):

- Si $A = 0$ ó $C = 0$ será una parábola.
- Si A y C tienen el mismo signo será una elipse.
- Si $A = C$ será una circunferencia.
- Si A y C son de signos contrarios será una hipérbola.
- D y E indican que el centro de la cónica (cuando lo hay), está fuera del origen de coordenadas, sí $D = 0$ el centro está sobre el eje "y", si $E = 0$ está sobre el eje "x".
- F (término independiente) indica que la cónica no pasa por el origen, si $F = 0$ sí pasa por el origen.
- Los ejes de estas cónicas serán paralelos a los ejes coordenados x, y.

b) En la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, los coeficientes de los términos de segundo grado A, B y C nos permiten identificar que tipo de cónica se tiene (también en el caso degenerado) procediendo a analizar el discriminante (o invariante) $B^2 - 4AC$ como sigue:

- Si $B^2 - 4AC = 0$, se trata de una parábola (o como caso degenerado un par de rectas paralelas o coincidentes).
- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse (o como caso degenerado un punto).
- Si $B^2 - 4AC > 0$, se trata de una hipérbola (o como caso degenerado un par de rectas que se cortan).
- De la misma manera que en el inciso a), los coeficientes D y E indican que el centro de la curva (si lo hay) está fuera del origen, si $D = 0$ el centro está sobre el eje "y", si $E = 0$, estará sobre el eje "x".
- El término independiente F indica que la curva no pasa por el origen, si $F = 0$, la curva si pasa por el origen.
- Los ejes de estas cónicas son oblícuos respecto a los ejes x, y.

EJEMPLOS

Determinar el tipo de cónica que representa cada ecuación:

1) $9x^2+25y^2-6x-25y-19=0$

Solución

Como en la ecuación dada no se tiene el término en (xy), o sea que $B=0$, se aplica el criterio del inciso a)

- Como $A=9$ y $C=25$ (son del mismo signo), la cónica es una ELIPSE.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Los coeficientes $D=-6$ y $E=-25$ indican que el centro de la elipse se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=-19$ indica que la elipse no pasa por el origen.

2) $16x^2-9y^2-32x-9y+100=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=16$ y $C=-9$ (son de signos contrarios) la cónica representa una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes son paralelos a los ejes coordenados x, y.
- Como $D=-32$ y $E=-9$ indican que el centro de la hipérbola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=100$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

3) $2x^2+2y^2-20x-28y-302=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=C=2$ (son iguales), la cónica representa una CIRCUNFERENCIA.
- $D=-20$ y $E=-28$ indica que el centro de la circunferencia se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=-302$ indica que la circunferencia no pasa por el origen.

4) $2y^2-x-12y+7=0$

Solución

- Como $B=0$, $A=0$ y $C=2$ esto indica que la cónica es una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje de las "x".
- Como $D=-1$ y $E=-12$, el vértice de la parábola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F=7$ indica que la parábola no pasa por el origen.

5) $\frac{1}{2}x^2 + x - y + 2 = 0$

Solución

- Como $B = 0$, $A = \frac{1}{2}$ y $C = 0$, la cónica representa una PARÁBOLA.
- Su eje es paralelo al eje de las "y".
- Como $D = 1$ y $E = -1$ indican que el vértice de la parábola se localiza fuera del origen de coordenadas x, y.
- El término independiente $F = 2$ indica que la parábola no pasa por el origen.

6) $2x^2 - xy + y^2 - x + 3y - 2 = 0$

Solución

Como la ecuación dada si contiene el término en (xy), o sea que $B = -1$, se aplica el criterio del inciso b).

- Analizando el discriminante $B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7$ como es negativo, esto indica que la cónica es una ELIPSE.
- Los ejes de la elipse están rotados un ángulo "α" respecto de los ejes coordenados x, y.
- Los coeficientes $D = -1$ y $E = 3$ indican que el centro de la elipse se localiza fuera del origen de coordenadas.
- El término independiente $F = -2$ indica que la elipse no pasa por el origen.

7) $4x^2 + 3xy - 4y^2 - 12x - 18y + 4 = 0$

Solución

- Como $B = 3$, $B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(4)(-4) = 9 + 64 = 73$ como es positivo, la cónica es una HIPÉRBOLA.
- Sus ejes están rotados un ángulo "α" respecto de los ejes x, y.
- $D = -12$ y $E = -18$ indican que el centro de la hipérbola se localiza fuera del origen de coordenadas.
- El término independiente $F = 4$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

8) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y = 0$

Solución

- Como $B = -2$, $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$, esto indica que la cónica es una PARÁBOLA.
- El eje de la parábola tiene una rotación de un ángulo "α" respecto de los ejes coordenados x, y.

- Una parábola no tiene centro y como el término independiente $F = 0$, la parábola pasa por el origen de coordenadas x, y.

9) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y - 14 = 0$

Solución

- Si $B = 4$, $B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(8)(5) = 16 - 160 = -144$, esto indica que la cónica es una ELIPSE.
- Sus ejes tienen una rotación de un ángulo "α" respecto de los ejes x, y.
- Como $D = 0$ y $E = 2$, el centro de la elipse se localiza sobre el eje de las "y".
- El término independiente $F = -14$ indica que la elipse no pasa por el origen.

10) $3x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 11 = 0$

Solución

- Si $B = -4$, $B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4$, esto indica que la cónica es una HIPÉRBOLA.
- Los ejes de la hipérbola tienen una rotación de un ángulo "α" respecto de los ejes coordenados x, y.
- Como $D = -5$ y $E = 0$, el centro de la hipérbola se localiza sobre el eje de las "x".
- El término independiente $F = 11$ indica que la hipérbola no pasa por el origen.

EJERCICIOS

En cada uno de los incisos, determinar el tipo de cónica que representa cada ecuación.

1) $2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 - 8x - 4y + 8 = 0$

2) $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y - 71 = 0$

3) $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$

4) $16x^2 - 9y^2 + 96x - 72y - 144 = 0$

5) $-3x^2 - 3y^2 + 18x + 18y - 27 = 0$

6) $3x^2 + 4xy - 6x + 8 = 0$

7) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

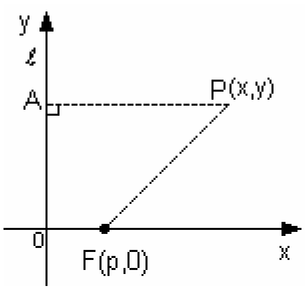
8) $x^2 - 4xy + 2y^2 = 0$

9) $y^2 - 9x = 0$

10) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 2 = 0$

7.4. EXCENTRICIDAD

Otra forma que se puede emplear para identificar el tipo de cónica que se tiene, es aplicando el concepto de excentricidad, el cual podemos definir como "El lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de manera que la relación de la distancia de "P" a un punto fijo "F" llamado foco y la distancia del mismo punto "P" a una recta fija "l" llamada directriz, es una constante no negativa "e" llamada EXCENTRICIDAD de la cónica".



Si tomamos al eje "y" como directriz y al foco sobre el eje "x" como se muestra en la figura, aplicamos la definición anterior: $\frac{PF}{PA} = e$.

Expresándola analíticamente, haciendo operaciones y simplificaciones, se tiene:

$$\frac{PF}{PA} = \frac{\sqrt{(x-p)^2 + y^2}}{x} = e \ ; \ \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = ex \ ; \ (x-p)^2 + y^2 = (ex)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = e^2x^2 \ ; \ x^2 - e^2x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0$$

$$(1-e)^2 x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0 \quad \cdots (1)$$

Se conoce a la ecuación (1) como la ecuación general de las cónicas en función de la excentricidad y en donde:

- Si $e = 0$, la ecuación (1) resulta $x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una CIRCUNFERENCIA que degenera en un punto.
- Si $e = 1$, la ecuación (1) resulta $y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una PARÁBOLA.
- Si $e < 1$, $e^2 < 1$, $(1-e^2) > 0$ y haciendo $q = 1 - e^2$ en la ecuación (1) resulta $qx^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una ELIPSE.
- Si $e > 1$, $e^2 > 1$, $(1-e^2) < 0$ y haciendo $-q = 1 - e^2$ en la ecuación (1) resulta $-qx^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ que representa a una HIPÉRBOLA.

EJEMPLOS

En cada inciso, con la información que se da de una cónica, obtener su ecuación.

1) Sean $F(3,2)$; la directriz: $y = 8$; $e = \frac{2}{3}$

Solución

De acuerdo con la definición $\frac{PF}{PA}=e$, sustituyendo información se tiene: $\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}}{y-8}=\frac{2}{3}$ efectuando operaciones:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\frac{2}{3}(y-8) \quad ; \quad (x-3)^2+(y-2)^2=\left[\frac{2}{3}(y-8)\right]^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=\frac{4}{9}\left(y^2-16y+64\right)$$

$$x^2+y^2-\frac{4}{9}y^2-6x-4y+\frac{4(16)}{9}y+13-\frac{4(64)}{9}=0$$

$$x^2+\frac{5}{9}y^2-6x+\frac{28}{9}y-\frac{139}{9}=0$$

$$\boxed{9x^2+5y^2-54x+28y-139=0}$$

Esta ecuación representa una ELIPSE ya que A y C tienen el mismo signo, esto ya lo sabíamos desde el principio pues las elipses tienen excentricidad $e<1$, lo cual se comprobó.

2) Sean $F(2,0)$; la directriz: $x=0$; $e=1$

Solución

Si $\frac{PF}{PA}=e$; $\frac{PF}{PA}=\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}}{x-0}=1$; $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x$; $(x-2)^2+y^2=x^2$

$x^2-4x+4+y^2=x^2$; $\boxed{y^2-4x+4=0}$

Esta ecuación representa una PARÁBOLA horizontal, cosa que ya se sabía antes con el dato de la excentricidad de $e=1$ que corresponde a una parábola.

3) Sean $F(5,2)$; la directriz: $x=-3$; $e=0$

Solución

El dato de la excentricidad $e=0$ sugiere que la cónica es una circunferencia que degenera en un punto.

Si $\frac{PF}{PA}=e$; $\frac{\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}}{x-0}=0$; $\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=0$; $(x-5)^2+(y-2)^2=0$

$x^2-10x+25+y^2-4y+4=0$; $\boxed{x^2+y^2-10x-4y+29=0}$

Esta ecuación es una CIRCUNFERENCIA que degenera en el punto de coordenadas $(5,2)$.

4) Sean $F(-3,4)$; directriz: $y=1$; $e=2$

Solución

$e=2$, sugiere que la cónica es una hipérbola.

Si $\dfrac{PF}{PA}=e$; $\dfrac{\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}}{y-1}=2$; $\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=2(y-1)$;
$(x+3)^2+(y-4)^2=[2(y-1)]^2$; $x^2+6x+9+y^2-8y+16=4(y^2-2y+1)$

$x^2+y^2-4y^2+6x-8y+8y+25-4=0$; $\boxed{x^2-3y^2+6x+21=0}$

Esta ecuación representa una HIPÉRBOLA.

5) Sean $F(-4,0)$; la directriz: $x=0$; $e=1$

Solución

Si $\dfrac{PF}{PA}=e$; $\dfrac{\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}}{x-0}=1$; $\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=x$; $x^2+8x+16+y^2=x^2$

$\boxed{y^2+8x+16=0}$

Esta ecuación representa una PARÁBOLA horizontal.

EJERCICIOS

En cada inciso se da la información de una cónica, obtenga su ecuación.

1) $F(2,-3)$; directriz: $x=3$; $e=\dfrac{3}{2}$
2) $F(0,4)$; directriz: $y=-1$; $e=0$
3) $F(4,2)$; directriz: $y=2$; $e=\dfrac{1}{2}$
4) $F(0,0)$; directriz: $x=-2$; $e=1$
5) $F(0,-3)$; directriz: $y=1$; $e=3$

7.5. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

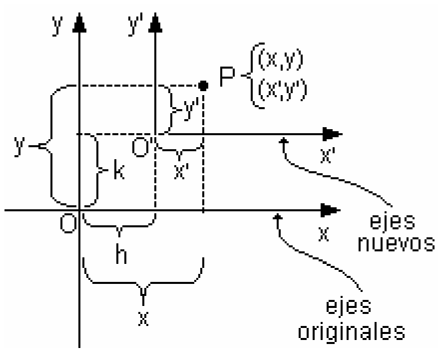
Algunas veces la ecuación de una cónica se puede escribir de una manera más simple mediante una traslación y/o una rotación de ejes, que por ciertas razones sea más conveniente para el problema que se esté resolviendo, donde un punto "P" arbitrario tenga diferentes coordenadas en diferentes sistemas coordenados.

- Con una traslación de los ejes originales, se consigue que el centro de una curva se ubique en el origen de los nuevos ejes.

- Una rotación se aplica cuando la curva es oblicua respecto a los ejes originales, logrando que sea paralela respecto a los nuevos ejes, (generalmente una ecuación de segundo grado en dos variables con término en (xy) es oblicua).

- Algunas veces es necesario con las cónicas, efectuar una traslación de ejes y también una rotación para presentar más simplificada su ecuación dependiendo del problema que se resuelve.

TRASLACIÓN. El proceso de traslación de un par de ejes a otro par de ejes, implica una transformación de coordenadas en donde tanto los ejes originales como los nuevos son paralelos y sin alterar la unidad de medida. La siguiente figura nos proporciona ayuda para encontrar las fórmulas de transformación:



- Las coordenadas del nuevo origen referidas al sistema original son $O'(h,k)$.
- $P(x,y)$ en el sistema original , $P(x',y')$ en el nuevo sistema

De la figura fácilmente se observa que: $x = x'+h$
$y = y'+k$

Estas son las fórmulas de transformación, donde al sustituir $x'+h$ en x, $y'+k$ en y en la ecuación de una curva que esté referida a los ejes originales x, y; esto da por resultado una ecuación de la misma curva pero ahora referida a los nuevos ejes x', y' ; trasladados.

EJEMPLOS

Por medio de una traslación de ejes, simplificar la ecuación dada en cada inciso:

1) $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ (Parábola)

Solución

Sustituyendo las fórmulas de transformación $x = x'+h$, $y = y'+k$ en la ecuación dada:

$(y'+k)^2-4(x'+h)-4(y'+k)+8=0$ desarrollando y ordenando:
$y'^2+2ky'+k^2-4x'-4h-4y'-4k+8=0$
$y'^2-4x'+(2k-4)y'+k^2-4k-4h+8=0$ ...(a)

Igualando a cero el coeficiente de y' y el término independiente simplificaremos la ecuación (a): $2k-4=0$; $k=\frac{4}{2}=2$; $k=2$

$k^2-4k-4h+8=0$; $(2)^2-4(2)-4h+8=0$; $-4h+4=0$; $h=\frac{4}{4}$; $h=1$

por lo tanto $(h,k)=(1,2)$ son las coordenadas del vértice de la parábola referidas a los ejes x,y originales.

Sustituyendo los valores de $h=1$ y $k=2$ en la ecuación (a) obtenemos la ecuación $y'^2-4x'=0$ referida a los nuevos ejes, ya simplificada.

2) $x^2+4y^2+2x-24y+21=0$ (Elipse)

Solución

Sustituyendo $x'+h$ en x, $y'+k$ en y, se tiene: $(x'+h)^2+4(y'+k)^2+2(x'+h)-24(y'+k)+21=0$
desarrollando y ordenando: $x'^2+2hx'+h^2+4y'^2+8ky'+4k^2+2x'+2h-24y'-24k+21=0$
$x'^2+4y'^2+(2h+2)x'+(8k+24)y'+h^2+2h+4k^2-24k+21=0$ ...(b)

La ecuación (b) se simplificará si igualamos a cero los coeficientes de x' y de y':

$2h+2=0$; $h=\frac{-2}{2}=-1$

$8k-24=0$; $k=\frac{24}{8}=3$

por lo tanto $(h,k)=(-1,3)$ son las coordenadas del centro de la elipse referidas a los ejes x,y originales.

Sustituyendo $h=-1$ y $k=3$ en la ecuación (b) obtenemos la ecuación $x'^2+4y'^2-16=0$ referida a los nuevos ejes x',y', ya simplificada.

3) $9x^2-4y^2-36x+16y+56=0$ (Hipérbola)

Solución

Sustituyendo $x'+h$ en x, $y'+k$ en y, se obtiene: $9(x'+h)^2-4(y'+k)^2-3(x'+h)+16(y'+k)+56=0$
desarrollando y ordenando: $9x'^2+18hx'+9h^2-4y'^2-8ky'-4k^2-3x'-3h+16y'+16k+56=0$

$9x'^2 - 4y'^2 + (18h-3)x' - (8k-16)y' + 9h^2 - 4k^2 - 3h + 16k + 56 = 0$ •••(c), se simplificará la ecuación (c) igualando a cero los coeficientes de x' y de y':

$18h - 3 = 0$; $h = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$8k - 16 = 0$; $k = \frac{16}{8} = 2$

$(h,k) = \left(\frac{1}{6}, 2\right)$ son las coordenadas del centro de la hipérbola referidas a los ejes x, y originales. Sustituyendo $h = \frac{1}{6}$ y $k = 2$ en la ecuación (c) se obtiene la ecuación $36x'^2 - 16y'^2 + 287 = 0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

4) $x^2 + 4x - 2y + 10 = 0$ (Parábola)

Solución

Sustituyendo $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada:

$(x'+h)^2 + 4(x'+h) - 2(y'+k) + 10 = 0$ desarrollando y ordenando:

$x'^2 + 2hx' + h^2 + 4x' + 4h - 2y' - 2k + 10 = 0$

$x'^2 - 2y' + (2h+4)x' + h^2 + 4h - 2k + 10 = 0$ •••(d), la ecuación (d) se simplificará si el coeficiente de x' y el término independiente se anulan:

$2h + 4 = 0$; $h = \frac{-4}{2}$; $h = -2$

$h^2 + 4h - 2k + 10 = 0$; $(-2)^2 + 4(-2) - 2k + 10 = 0$; $-2k + 6 = 0$; $k = 3$

$(h,k) = (-2,3)$ son las coordenadas del vértice de la parábola referidas a los ejes x, y originales. Sustituyendo $h = -2$ y $k = 3$ en la ecuación (d) se obtiene la ecuación $x'^2 - 2y' = 0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

5) $25x^2 + 16y^2 - 200x + 96y + 144 = 0$ (Elipse)

Solución

Sustituyendo $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada:

$25(x'+h)^2 + 16(y'+k)^2 - 200(x'+h) + 96(y'+k) + 144 = 0$ desarrollando y ordenando:

$25x'^2+50hx'+25h^2+16y'^2+32ky'+16k^2-200x'-200h+96y'+96k+144=0$

$25x'^2+16y'^2+(50h-200)x'+(32k+96)y'+25h^2+16k^2-200h+96k+144=0$ •••(e) , la ecuación (e) se simplificará si los coeficientes de x' y de y' se anulan:

$$50h-200=0 \quad ; \quad h=\frac{200}{50}=4$$

$$32k+96=0 \quad ; \quad k=\frac{-96}{32}=-3$$

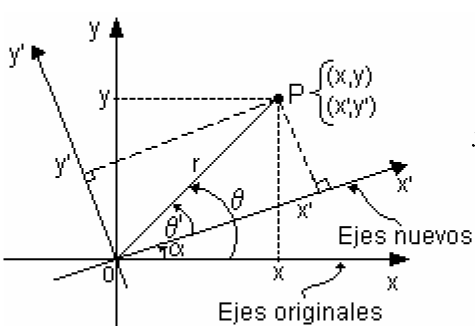
$(h,k)=(4,-3)$ son las coordenadas del centro de la elipse referidas a los ejes x, y originales. Sustituyendo $h=4$ y $k=-3$ en la ecuación (e) se obtiene la ecuación $25x'^2+16y'^2+400=0$ referida a los nuevos ejes x', y', ya simplificada.

EJERCICIOS

Aplicando una traslación de ejes, simplificar la ecuación dada en cada inciso:

1) $4x^2-y^2+24x+6y+23=0$
2) $3x^2+12x-2y+6=0$
3) $x^2+4y^2+4x+24y+36=0$
4) $2y^2-4y-x-1=0$
5) $16y^2-4x^2-16x+96y+64=0$

ROTACIÓN. Algunas veces también surge la necesidad de cambiar el sistema original rotándolo un ángulo "α" para obtener un nuevo sistema, que pueda permitir escribir una curva en una forma más simple, en donde un punto arbitrario "P" tenga diferentes coordenadas en los diferentes sistemas coordenados. Con la siguiente figura nos apoyaremos para mostrar como podemos lograr una rotación de ejes:



Si $x=r\cos\theta$ y $\theta=\theta'+\alpha$, entonces $x=r\cos(\theta'+\alpha)$ y por trigonometría se tiene que:

$$x=r(\cos\theta'\cos\alpha-sen\theta' sen\alpha)=\underbrace{r\cos\theta'}_{x'}\cos\alpha-\underbrace{rsen\theta'}_{y'}sen\alpha$$

$$\boxed{x=x'\cos\alpha-y' sen\alpha} \quad •••(1)$$

Si $y=rsen\theta$ y $\theta=\theta'+\alpha$ entonces $y=rsen(\theta'+\alpha)$ y por trigonometría se tiene que:

$$y=r(\cos\theta' sen\alpha+sen\theta'\cos\alpha)=r\cos\theta' sen\alpha+rsen\theta'\cos\alpha$$

$$\boxed{y=x' sen\alpha+y'\cos\alpha} \quad •••(2)$$

Al sustituir las expresiones (1)••• $x = x'\cos\alpha - y'sen\alpha$, (2)••• $y = x'sen\alpha + y'\cos\alpha$ en la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y después de hacer operaciones y simplificaciones se obtiene la ecuación:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

En donde:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + Bsen\alpha\cos\alpha + Csen^2\alpha \\
B' &= B\cos 2\alpha - (A - C)sen2\alpha \\
C' &= Asen^2\alpha - Bsen\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\
D' &= D\cos\alpha + Esen\alpha \\
E' &= E\cos\alpha - Dsen\alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Como parte fundamental de la simplificación de la ecuación general es desaparecer el término “Bxy”, esto se logra si el coeficiente $B' = B\cos 2\alpha - (A - C)sen2\alpha$ es igual a cero o sea que $B\cos 2\alpha - (A - C)sen2\alpha = 0$ •••(I) en donde:

$$B\cos 2\alpha = (A - C)sen2\alpha \quad ; \quad \frac{B}{A - C} = \frac{sen2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Se obtiene la expresión $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}}$; $A \neq C$ que permite conocer el ángulo de rotación “α” de los ejes x, y.

Si en la expresión (I) $A = C$ se tiene $B\cos 2\alpha = 0$, la cual tendrá solución cuando $\alpha = 45^0$ ya que $\cos 90^0 = 0$.

EJEMPLOS

En cada inciso, determinar el ángulo agudo de rotación “α” de los ejes y las fórmulas de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$.

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 4y - 8 = 0$

<u>Solución</u>

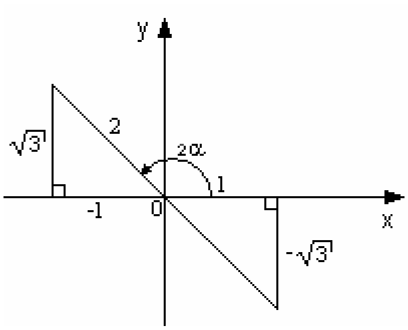
En la ecuación dada, observamos que los coeficientes $A = C = 1$, esto indica que el ángulo de rotación de los ejes es $\alpha = 45^0$ y como $\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $sen45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, las fórmulas de transformación (1) y (2) que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

2) $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 - 2 = 0$

Solución

En la ecuación dada, observamos que $A \neq C$, por lo tanto se debe calcular $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2-1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{1}$. Con ayuda del siguiente esquema observamos que para que el ángulo "α" sea agudo, se tiene: $\cos 2\alpha = \dfrac{-1}{2}$ y por trigonometría sabemos que:



$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

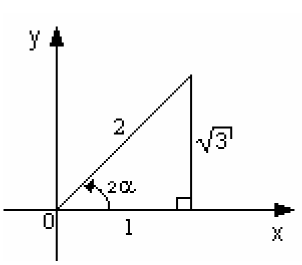
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^0$; $\alpha = 60^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' - \sqrt{3}y'}{2} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}$$

3) $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 4x = 0$

Solución



Como $A \neq C$, $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-\sqrt{3}}{1-2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$

y por trigonometría:

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad ;$$

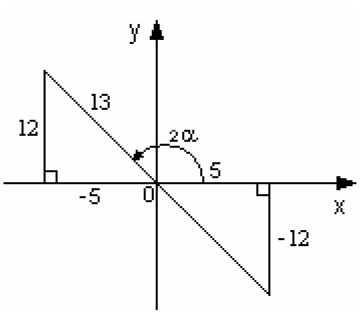
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^0$; $\alpha = 30^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$$

4) $35x^2 - 12xy + 30y^2 - 30x + 6y - 24 = 0$

Solución



Como $A \neq C$, $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{-12}{35-30} = \dfrac{-12}{5}$; para que "α" sea agudo: $\cos 2\alpha = \dfrac{-5}{13}$ y por trigonometría:

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

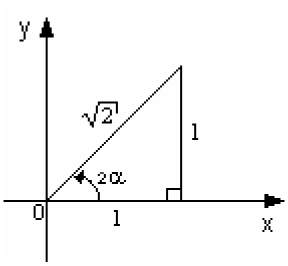
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{-5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$\alpha = sen^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56.31^0$; $\alpha = 56.31^0$ es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$x = x'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) - y'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2x' - 3y'}{\sqrt{13}} \quad ; \quad y = x'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{3x' + 2y'}{\sqrt{13}}$$

5) $x^2 + 2xy - y^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0$

Solución



Como $A \neq C$, $\tan 2\alpha = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{2}{1-(-1)} = \dfrac{2}{2} = 1$; $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 45^0$

$\alpha = 22.5^0$ que es el ángulo de rotación de los ejes y las fórmulas (1) y (2) de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$ son:

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

entonces:

$$x = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} - y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad ; \quad y = x'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + y'\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

EJERCICIOS

En cada inciso, determine el ángulo de rotación "α" de los ejes y las fórmulas de transformación que desaparecen el término en $(x'y')$.

1) $3x^2 - 10xy - 3y^2 + 11x - 13y + 21 = 0$
2) $2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 18 = 0$
3) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x = 0$
4) $4x^2 - 2xy + 2y^2 + x - 4 = 0$
5) $x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 1 = 0$