Tema 1.- Números complejos y fasores

§1.1.- Números complejos

1.1.a. Definición y operaciones elementales

Los números complejos pueden expresarse en la forma:

$$\mathbb{Z} = a + \mathbf{j}b \qquad \text{(forma binómica)} \qquad [1]$$

donde a y b son números reales y $\mathbf{j}$ es la **unidad imaginaria pura**; *i.e.,*

$$\mathbf{j} = \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{j}^2 = -1 \qquad [2]$$

La **parte real** de $\mathbb{Z}$ se expresa como Re($\mathbb{Z}$) = a; la **parte imaginaria** como Im($\mathbb{Z}$) = b:

$$\mathbb{Z} = \mathrm{Re}(\mathbb{Z}) + \mathbf{j}\,\mathrm{Im}(\mathbb{Z}) \qquad \text{(forma binómica)} \qquad [3]$$

Suma y resta: $\mathbb{Z}_1 \pm \mathbb{Z}_2 = (a_1 + \mathbf{j}b_1) \pm (a_2 + \mathbf{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathbf{j}(b_1 \pm b_2)$

Multiplicación: $\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2 = (a_1 + \mathbf{j}b_1)(a_2 + \mathbf{j}b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathbf{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$

División:

$$\frac{\mathbb{Z}_1}{\mathbb{Z}_2} = \frac{a_1 + \mathbf{j}b_1}{a_2 + \mathbf{j}b_2} = \frac{(a_1 + \mathbf{j}b_1)(a_2 - \mathbf{j}b_2)}{(a_2 + \mathbf{j}b_2)(a_2 - \mathbf{j}b_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + \mathbf{j}(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

El **complejo conjugado** $\mathbb{Z}^*$ del número complejo $\mathbb{Z}$ es

$$\mathbb{Z}^* = a - \mathbf{j}b \qquad [4]$$

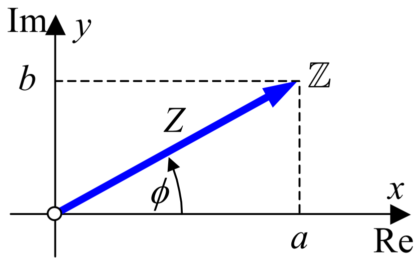
$$\mathbb{Z}\mathbb{Z}^* = (a + \mathbf{j}b)(a - \mathbf{j}b) = a^2 + b^2 \qquad [5]$$

Módulo de un complejo:

$$|\mathbb{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \rightarrow \quad |\mathbb{Z}|^2 = Z^2 = \mathbb{Z}\mathbb{Z}^* \qquad [6]$$

1.1.b. Representación geométrica

Tomamos como **eje real** (o polar) el eje x y como **eje imaginario** el eje y. Entonces, el número complejo $\mathbb{Z} = a + \mathbf{j}\,b$ viene representado por un segmento orientado (flecha o aguja) que une el origen de coordenadas con el punto (a, b) del plano complejo. Las proyecciones de $\mathbb{Z}$ sobre los respectivos ejes son Re($\mathbb{Z}$) e Im($\mathbb{Z}$).

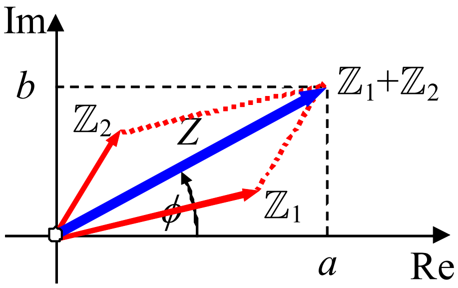


Llamamos **argumento** del número complejo al ángulo ϕ definido por su representación geométrica y el eje real. Podemos expresar el número complejo en función de su módulo y de su argumento:

$$\mathbb{Z} = Z_{\underline{|\phi}} = Z(\cos\phi + \mathbf{j}\operatorname{sen}\phi) \qquad \text{(forma trigonométria o polar)} \qquad [7]$$

$$\begin{cases} a = Z\cos\phi \\ b = Z\operatorname{sen}\phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad [8]$$

En la representación gráfica, la suma de los números complejos obedece la ley del paralelogramo, como se ilustra en la figura. Los números complejos poseen algunas de las propiedades de los vectores en el espacio bidimensional, pero no deben confundirse con éstos.



1.1.c. Representación exponencial

Recordemos la relación existente entre las funciones exponencial, sinusoidal y cosinusoidal:

$$e^{\mathbf{j}\phi} = \cos\phi + \mathbf{j}\operatorname{sen}\phi \qquad [9]$$

que se deduce del desarrollo en serie de Taylor de los tres términos. Podemos escribir

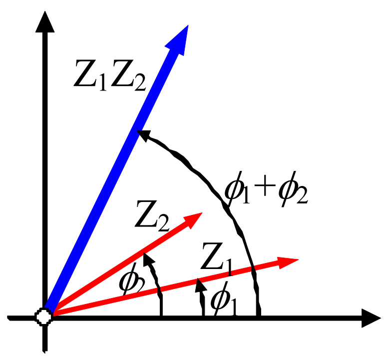
$$\mathbb{Z} = Z_{\underline{|\phi}} = Ze^{\mathbf{j}\phi} \qquad \text{(forma exponencial)} \qquad [10]$$

Esta forma es particularmente adecuada para la representación de la amplitud y de la fase de una oscilación.

En las formas polar y exponencial, la multiplicación y división de complejos es muy simple y adecuada para cálculos numéricos:

Multiplicación: $$\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2 = \begin{cases} Z_{1\underline{|\phi_1}} Z_{2\underline{|\phi_2}} = (Z_1 Z_2)_{\underline{|\phi_1+\phi_2}} \\ Z_1 e^{\mathbf{j}\phi_1} Z_2 e^{\mathbf{j}\phi_2} = (Z_1 Z_2) e^{\mathbf{j}(\phi_1+\phi_2)} \end{cases}$$

División: $$\frac{\mathbb{Z}_1}{\mathbb{Z}_2} = \begin{cases} \dfrac{Z_{1\underline{|\phi_1}}}{Z_{2\underline{|\phi_2}}} = \left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)_{\underline{|\phi_1-\phi_2}} \\ \dfrac{Z_1 e^{\mathbf{j}\phi_1}}{Z_2 e^{\mathbf{j}\phi_2}} = \left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right) e^{\mathbf{j}(\phi_1-\phi_2)} \end{cases}$$



A partir de la representación gráfica de los números complejos, resulta que multiplicar o dividir un número complejo por otro equivale a multiplicar o dividir su módulo (agrandarlo o acortarlo) y hacerlo girar en el plano complejo. El producto es conmutativo.

Los números complejos de módulo unidad ($Z = 1$) pertenecen a la circunferencia de radio unidad con centro en el origen del plano complejo y son de la forma:

$$\mathbb{U} = e^{\mathbf{j}\phi} = \cos\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi \quad [11]$$

1.1.d. Algunas aplicaciones

Es fácil demostrar que

$$\mathbb{U}^n = \left(e^{\mathbf{j}\phi}\right)^n = e^{\mathbf{j}n\phi} = \left(\cos\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi\right)^n = \cos n\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,n\phi \qquad \text{(fórmula de Moivre)} \quad [12]$$

la cual, igualando separadamente sus partes reales e imaginarias, nos conduce directamente a las fórmulas del seno y coseno de ángulos múltiplos. Así,

$$\left(\cos\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi\right)^2 = \left(\cos^2\phi - \mathrm{sen}^2\,\phi\right) + 2\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi = \cos 2\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,2\phi$$

$$\mathrm{sen}\,2\phi = 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi \qquad\qquad \cos 2\phi = \cos^2\phi - \mathrm{sen}^2\,\phi$$

A partir de la fórmula de Moivre se deducen muchas relaciones trigonométricas: Como ejercicio, utilícese [9] para obtener:

$$\cos\phi = \frac{e^{\mathbf{j}\phi} + e^{-\mathbf{j}\phi}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\phi = \frac{e^{\mathbf{j}\phi} + e^{-\mathbf{j}\phi}}{2\mathbf{j}} \qquad [13]$$

Una ecuación con magnitudes complejas debe satisfacerse separadamente por su parte real y su parte imaginaria. Así, podemos manejar una oscilación $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ en la forma compleja

$$x = Ae^{\mathbf{j}(\omega t + \phi)} = Ae^{\mathbf{j}\phi}e^{\mathbf{j}\omega t} \quad [14]$$

considerando tan sólo la parte imaginaria del complejo $Ae^{\mathbf{j}(\omega t+\phi)}$. Al finalizar los desarrollos y cálculos, consideraremos únicamente la parte imaginaria del resultado. Esto se puede hacer con toda libertad en tanto que no aparezcan productos de números complejos; *i.e.,* cuando las ecuaciones son lineales en las magnitudes complejas. Debemos prestar mucha atención a los productos de números complejos. Así, supongamos que estamos interesados en el producto y_1y_2 de dos magnitudes reales. Si escribiésemos

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_1 = x_1 + \mathbf{j}y_1 \\ \mathbb{Z}_2 = x_2 + \mathbf{j}y_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2 = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + \mathbf{j}\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)$$

la parte imaginaria del producto es $\mathrm{Im}(\mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_2) = x_1y_2 + x_2y_1$, que no es igual al producto de las partes imaginarias $\mathrm{Im}(\mathbb{Z}_1)\ \mathrm{Im}(\mathbb{Z}_2) = y_1y_2$.

1.1.e. Ejemplo

Encontrar la resultante de las oscilaciones

$$x_1 = A\,\mathrm{sen}\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \ \text{ y } \ x_2 = A\,\mathrm{sen}\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\,.$$

Con notación fasorial:

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{\mathbf{j}\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \\ x_2 = Ae^{\mathbf{j}\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = x_1 + x_2 = 2A\frac{e^{\mathbf{j}\frac{\Delta\omega}{2}t} + e^{-\mathbf{j}\frac{\Delta\omega}{2}t}}{2}e^{\mathbf{j}\omega t} = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)e^{\mathbf{j}\omega t}$$

y tomando tan sólo la parte imaginaria del resultado

$$x = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{Im}\left(e^{\mathbf{j}\omega t}\right) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\mathrm{sen}\,\omega t$$

de modo que el resultado es una oscilación de frecuencia $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ cuya amplitud está modulada con una frecuencia de pulsación $\omega_{\mathrm{p}} = \left|\omega_1 - \omega_2\right|$.

§1.2.- Representación fasorial

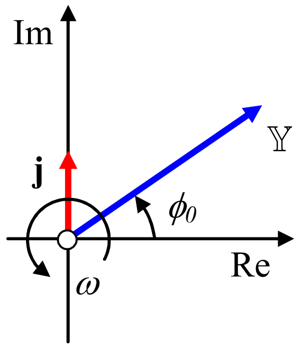
Fasor es una magnitud de naturaleza compleja cuyo argumento aumenta uniformemente con el tiempo. En su representación geométrica, puede interpretarse como un "número complejo rotatorio".

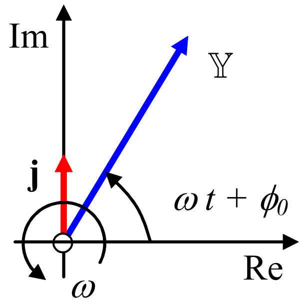
El **argumento** del fasor será de la forma $\phi = \omega t + \phi_0$. Normalmente se le representan en el instante $t = 0$.

La notación fasorial es muy adecuada para la representación de la amplitud y de la fase de una oscilación. Así,

$$y(t) = Y\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \varphi_0\right) \quad \rightarrow \quad y = \mathrm{Im}\left(\mathbb{Y}\right)$$

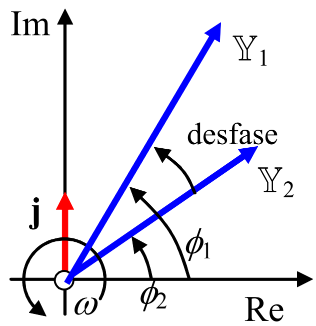
$$\mathbb{Y} = \begin{cases} Ye^{\mathbf{j}(\omega t+\phi_0)} \\ Y_{\underline{|\omega t+\phi_0}} \\ Y\left[\cos\left(\omega t + \phi_0\right) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \phi_0\right)\right] \end{cases}$$





1.2.a. Desfase entre fasores

En muchas ocasiones, estamos interesados en el estudio de oscilaciones que tienen todas la misma frecuencia. En estas circunstancias, solo estaremos interesados en los desfases relativos entre ellas, por lo que consideraremos una "instantánea" de las oscilaciones (*v.g.*, $t = 0$), de modo que trabajaremos con fasores de la forma:



$$\mathbb{Y} = Ye^{j\phi_0} = Y_{\underline{|\phi_0}} = Y\left(\cos\phi_0 + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\phi_0\right)$$

y el desfase entre dos fasores será

$$\begin{cases} y_1 = Y_1\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \phi_1\right) \\ y_2 = Y_2\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \phi_2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_{\underline{|\phi_1}} \\ Y_{\underline{|\phi_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ye^{\mathbf{j}\phi_1} \\ Ye^{\mathbf{j}\phi_2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{desfase} = \left|\phi_1 - \phi_2\right|$$

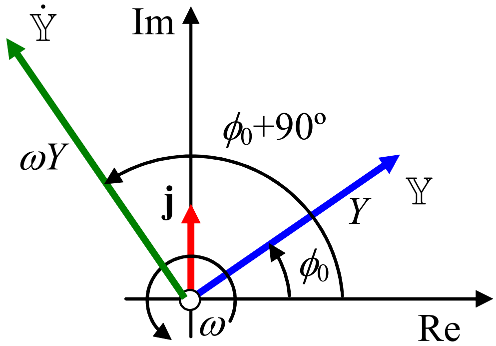
§1.3.- Derivación e integración temporal de una magnitud fasorial

1.3.a. Derivación

$$\mathbb{Y} = Y\left[\cos(\omega t + \phi_0) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Y}}{\mathrm{d}t} = \omega Y\left[-\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) + \mathbf{j}\cos(\omega t + \phi_0)\right] =$$

$$= \omega Y\left[\cos(\omega t + \phi_0 + \tfrac{\pi}{2}) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0 + \tfrac{\pi}{2})\right]$$



La derivada de $\mathbb{Y}$ se adelanta $\pi/2$ con respecto de $\mathbb{Y}$.

También podemos escribir:

$$\mathbb{Y} = Ye^{\mathbf{j}(\omega t + \phi_0)} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbb{Y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{j}\omega Ye^{(\mathbf{j}\omega t + \phi_0)} = \omega Ye^{\left(\mathbf{j}\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

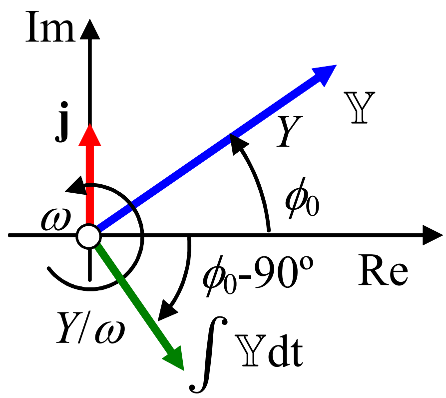
$$\mathbb{Y} = Y_{\lfloor \omega t + \phi_0} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbb{Y}}{\mathrm{d}t} = \omega Y_{\lfloor \omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}} \qquad [15]$$

1.3.b. Integración

$$\mathbb{Y} = Y\left[\cos(\omega t + \phi_0) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0)\right]$$

$$\int \mathbb{Y}\mathrm{d}t = \frac{Y}{\omega}\left[\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0) - \mathbf{j}\cos(\omega t + \phi_0)\right] =$$

$$= \frac{Y}{\omega}\left[\cos(\omega t + \phi_0 - \tfrac{\pi}{2}) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0 - \tfrac{\pi}{2})\right]$$



La integral de $\mathbb{Y}$ se retrasa $\pi/2$ con respecto de $\mathbb{Y}$.

También podemos escribir:

$$\mathbb{Y} = Ye^{\mathbf{j}(\omega t + \phi_0)} \quad \rightarrow \quad \int \mathbb{Y}\mathrm{d}t = \frac{Y}{\mathbf{j}\omega}e^{(\mathbf{j}\omega t + \phi_0)} = -\mathbf{j}\frac{Y}{\omega}e^{(\mathbf{j}\omega t + \phi_0)} = \frac{Y}{\omega}e^{\left(\mathbf{j}\omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\mathbb{Y} = Y_{\lfloor \omega t + \phi_0} \quad \rightarrow \quad \int \mathbb{Y}\mathrm{d}t = \left(\frac{Y}{\omega}\right)_{\lfloor \omega t + \phi_0 - \frac{\pi}{2}} \qquad [16]$$