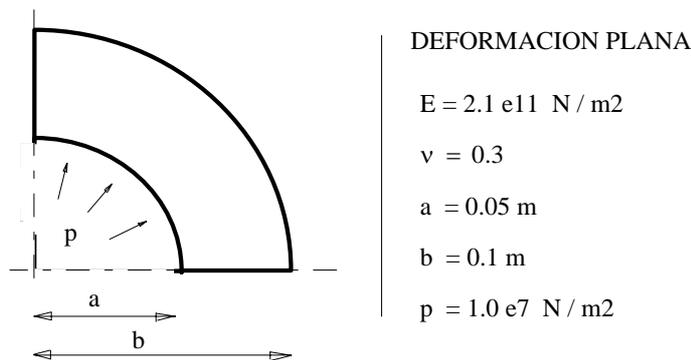


1. INTRODUCCIÓN: ERROR DE DISCRETIZACIÓN

Esta práctica tiene por objeto estudiar el error de discretización introducido en el análisis mediante elementos finitos. Para ello, se considerará un ejemplo simple, como es el caso de un cilindro sometido a presión interna. Consideraremos la solución exacta del problema y la compararemos con discretizaciones de elementos finitos en grado creciente de refinamiento uniforme.



La solución exacta para este problema, en coordenadas cilíndricas, es:

Desplazamientos radiales:

$$u_r = \frac{p(1 + \nu)}{E(k^2 - 1)} \left[(1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right] \quad ; \quad k = \frac{b}{a}$$

Tensiones:

$$\sigma_r = \frac{p}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{p(1 + \nu)}{k^2 - 1}$$

2. RESULTADOS

A) Calcular, para la solución exacta:

- Desplazamiento radial interno (u_a) y externo (u_b)
- Energía de deformación (U_{ex}), calculada a partir del trabajo de las fuerzas aplicadas:

$$U_{ex} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} u_a p a d\theta$$

B) Analizar el problema mediante el M.E.F. considerando:

- Elementos triangulares de tres nodos (PLANE42) con funciones de forma estándares (seleccionar “Exclude” en la opción K2), considerando elementos de tamaño 5.0, 2.5, 1.25, 0.625 y 0.3125 cm.
- Elementos triangulares de seis nodos (PLANE82) considerando elementos de tamaño 5.0, 2.5, 1.25 y 0.625 cm.

Para todas las discretizaciones, obtener de la solución de elementos finitos:

- Desplazamiento radial interno (u_{aef}) y externo (u_{bef})
- Energía de deformación ($U_{ef} = SENE$)
- Error estimado en norma energética ($e_{es} = SERR$)
- Porcentaje de error estimado en norma energética ($\eta_{es} = SEPC$)
- Tensiones radiales y circunferenciales en los nodos del eje x.

C) Considerando la solución analítica del problema, calcular el error de discretización exacto en energía de deformación (absoluto y porcentual) como:

$$e_{ex} = U_{ex} - U_{ef}$$

$$\eta_{ex} = \sqrt{\frac{e_{ex}}{U_{ex}}} \times 100$$

D) Representar gráficamente la energía de deformación de la solución de elementos finitos (U_{ef}) frente al tamaño de elemento para cada tipo de elemento en un gráfico semilogarítmico.

E) Representar gráficamente en escala logarítmica los errores en norma energética porcentuales estimado (η_{es}) y exacto (η_{ex}) en función del tamaño de elemento para los dos tipos de elemento utilizados. Estimar la velocidad de convergencia con el tamaño de elemento (pendiente de la curva del error estimado en escala logarítmica-logarítmica). Comparar los resultados obtenidos para cada tipo de elemento y razonar el comportamiento observado sobre la convergencia del error.

NOTA: Si el refinamiento fuera completamente uniforme (todos los elementos de la malla del mismo tamaño) y se representara exactamente tanto el contorno (lo que no ocurre en los segmentos circulares) como las fuerzas aplicadas, la velocidad de convergencia debería coincidir con la teórica. El error debería reducirse proporcionalmente a la variación de tamaño elevada al grado del polinomio completo de la interpolación de los desplazamientos.

F) Comparar, mediante representación gráfica, las tensiones radiales y circunferenciales obtenidas en las diferentes discretizaciones con las correspondientes tensiones exactas.

3. NOTAS

El proceso para modelizar el problema en ANSYS es similar al de prácticas anteriores. Es importante recordar que se trata de un problema de deformación plana (en opciones de elemento elegir "Plane Strain").

Dado que en ANSYS se utiliza el mismo tipo elemento para definir un triángulo y un cuadrilátero, para mallar sólo con triángulos hay que indicar esta opción. Para ello elegir en la ventana de herramientas de mallado (opción MeshTool del preprocesador, dentro de Meshing) la opción Tri que hay junto a la palabra Shape.

Para obtener la energía de deformación total y el error absoluto en norma energética total hay que crear una tabla. Para ello elegimos la opción Element Table en el menú principal (dentro del postprocesador) y hacemos clic en Define Table. Se abre una ventana que permite añadir datos a la tabla (botón Add). Añadimos la energía de deformación (SENE) y el error estimado (SERR). Después con la opción Sum of Each Item del menú principal obtendremos la suma para todos los elementos de los datos elegidos anteriormente.

Si ya tenemos una tabla definida en un análisis anterior (aunque sea con otra malla) antes de obtener resultados con ella hay que actualizarla (botón Update de la ventana Define Table) para reflejar los últimos cálculos.

Para calcular los desplazamientos radiales del cilindro, se puede consultar el valor del desplazamiento en x de los nodos interior y exterior del cilindro sobre el eje x. Para ello en el menú del postprocesador elegir Query Results y Nodal Solu.

Para obtener las tensiones en los nodos del eje x hay que crear un camino (Path Operations, Define Path, By Nodes en el menú del postprocesador) entre el nodo interior y el nodo exterior del cilindro sobre el eje x. Podemos obtener un fichero con las tensiones mediante la opción Plot Path Item, List Path Items y salvando el listado que aparece. Este fichero se puede leer (tras arreglarlo un poco) con una hoja de cálculo para obtener un gráfico comparativo de cómo evolucionan las tensiones con el tamaño de elemento.