



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA



FUNDAMENTOS DEL M.E.F. Y APLICACIONES

TEMA 6.- ERROR DE DISCRETIZACIÓN Y TÉCNICAS ADAPTATIVAS

Escuela de Ingeniería Mecánica
Universidad Industrial de Santander

ÍNDICE

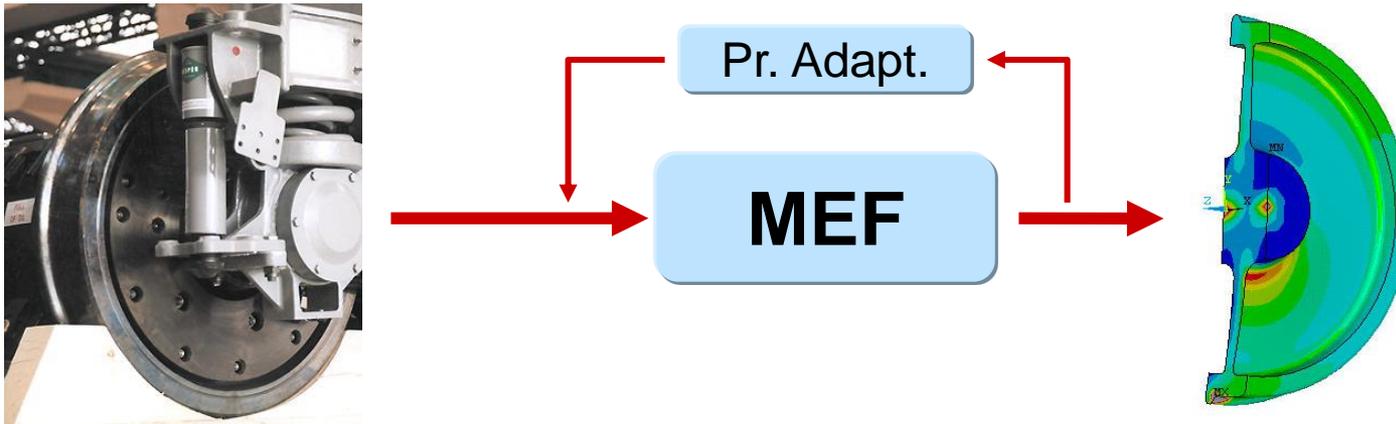
- 1.- Introducción
- 2.- Velocidad de convergencia del error de discretización
- 3.- Cuantificación del error de discretización
- 4.- Estimación del error de discretización
- 5.- Reconstrucción del campo de tensiones
- 6.- Técnicas adaptativas

ÍNDICE

- 1.- Introducción
- 2.- Velocidad de convergencia del error de discretización
- 3.- Cuantificación del error de discretización
- 4.- Estimación del error de discretización
- 5.- Reconstrucción del campo de tensiones
- 6.- Técnicas adaptativas



1.- Introducción



Objetivos:

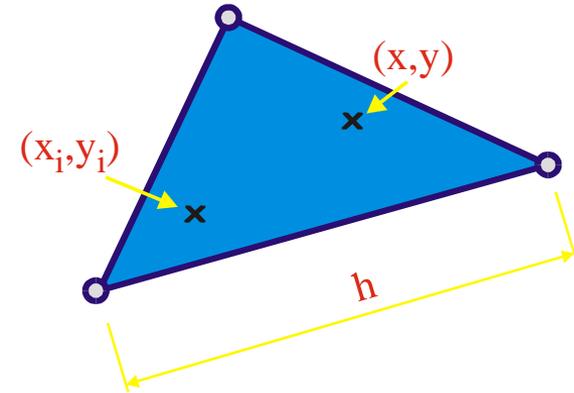
- a) Plantear técnicas para cuantificar el error de discretización
- b) Exponer técnicas adaptativas

ÍNDICE

- 1.- **Introducción**
- 2.- **Velocidad de convergencia del error de discretización**
 - 2.1.- Superconvergencia
- 3.- **Cuantificación del error de discretización**
- 4.- **Estimación del error de discretización**
- 5.- **Reconstrucción del campo de tensiones**
- 6.- **Técnicas adaptativas**

2.- Velocidad de convergencia del error de discretización

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots$$



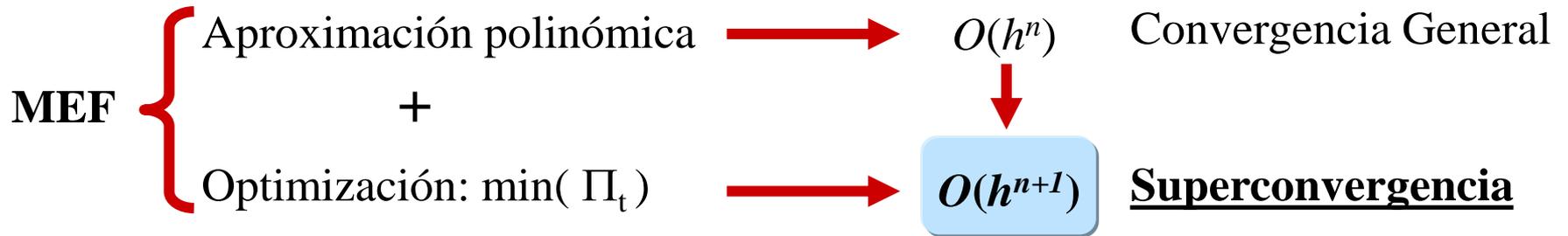
Magnitud	Orden del error	$p=1$	$p=2$
\mathbf{u}_{ef}	$O(h^{p+1})$	$O(h^2)$	$O(h^3)$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ef} \quad \boldsymbol{\sigma}_{ef}$	$O(h^p)$	$O(h)$	$O(h^2)$
Π_{ef}	$O(h^{2p})$	$O(h^2)$	$O(h^4)$
$\ \mathbf{u}_{ef}\ $	$O(h^p)$	$O(h)$	$O(h^2)$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2\Pi}$$

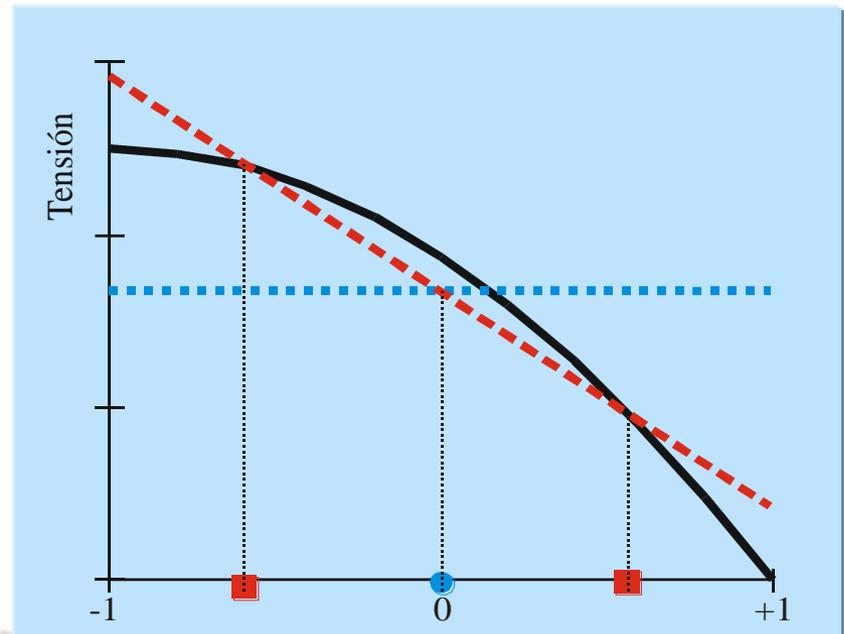
2.- Velocidad de convergencia del error de discretización

2.1.- Superconvergencia



Puntos de superconvergencia

u	nodos
σ, ε	puntos de Gauss



ÍNDICE

- 1.- **Introducción**
- 2.- **Velocidad de convergencia del error de discretización**
- 3.- **Cuantificación del error de discretización**
- 4.- **Estimación del error de discretización**
- 5.- **Reconstrucción del campo de tensiones**
- 6.- **Técnicas adaptativas**



3.- Cuantificación del error de discretización

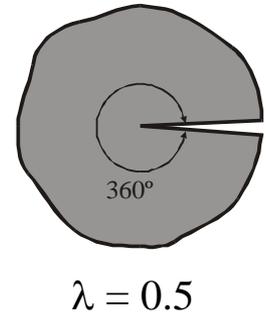
Magnitud $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega} = \sqrt{2\Pi}$

Error $\|\mathbf{e}_{ex}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV}$

$$\eta_{ex} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} \cdot 100$$

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^p \quad \longrightarrow \quad \|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^c \quad c = \min(p, \lambda)$$

$$N \propto \frac{1}{h^d}$$



Leyes de convergencia	Ref. Uniforme	$\ \mathbf{e}_{ex}\ \approx CN^{-\frac{1}{d}c}$
	Ref. Adaptativo	$\ \mathbf{e}_{ex}\ \approx CN^{-\frac{1}{d}p}$

ÍNDICE

- 1.- **Introducción**
- 2.- **Velocidad de convergencia del error de discretización**
- 3.- **Cuantificación del error de discretización**
- 4.- **Estimación del error de discretización**
- 5.- **Reconstrucción del campo de tensiones**
- 6.- **Técnicas adaptativas**



4.- Estimación del error de discretización

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega} = \sqrt{2\Pi}$$

▪ Error exacto

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV}$$

▪ Estimador ZZ

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV}$$

▪ Error relativo

$$\eta_{ex} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} \cdot 100 \quad \longrightarrow \quad \eta_{es} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\sqrt{\|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{es}\|^2}} \cdot 100$$

▪ Efectividad

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\|\mathbf{e}_{ex}\|} \quad \theta \in (0.8...1.2)$$

ÍNDICE

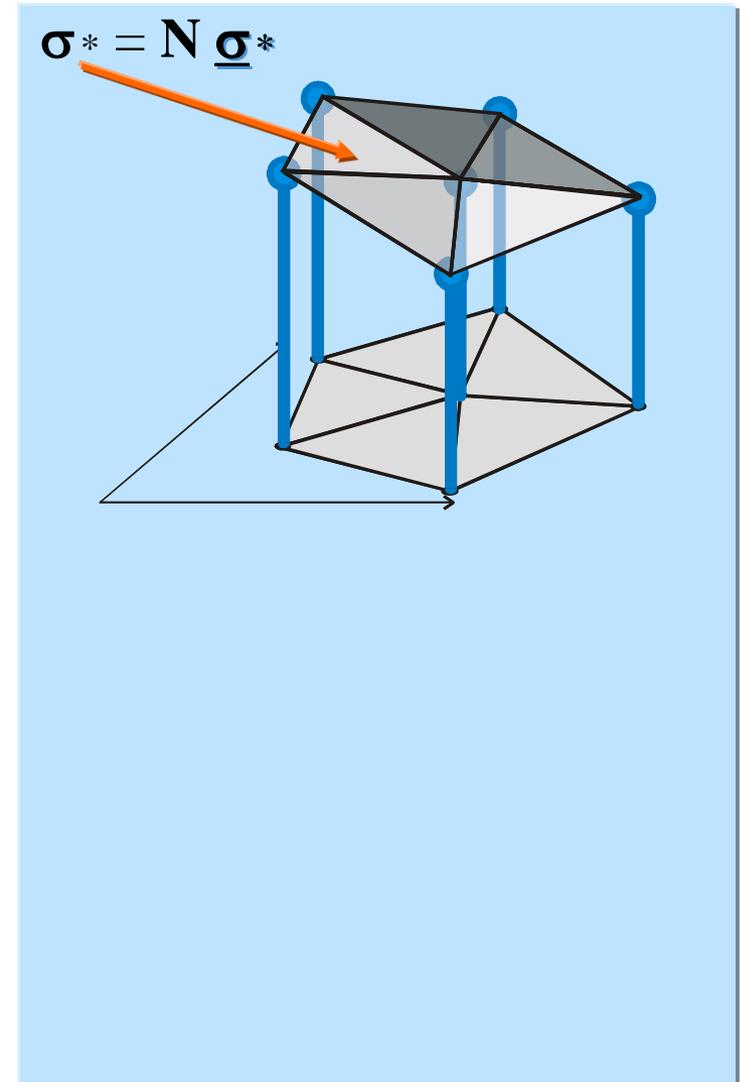
- 1.- **Introducción**
- 2.- **Características de la solución**
- 3.- **Clasificación de errores en el MEF**
- 4.- **Velocidad de convergencia del error de discretización**
- 5.- **Cuantificación del error de discretización**
- 6.- **Estimación del error de discretización**
- 7.- **Reconstrucción del campo de tensiones**
 - 7.1.- Promediado directo en nodos
 - 7.2.- La Técnica SPR
- 8.- **Técnicas adaptativas**

5.- Reconstrucción del campo de tensiones

$$\|e_{es}\| = \sqrt{\int (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}_{ef}) dV}$$

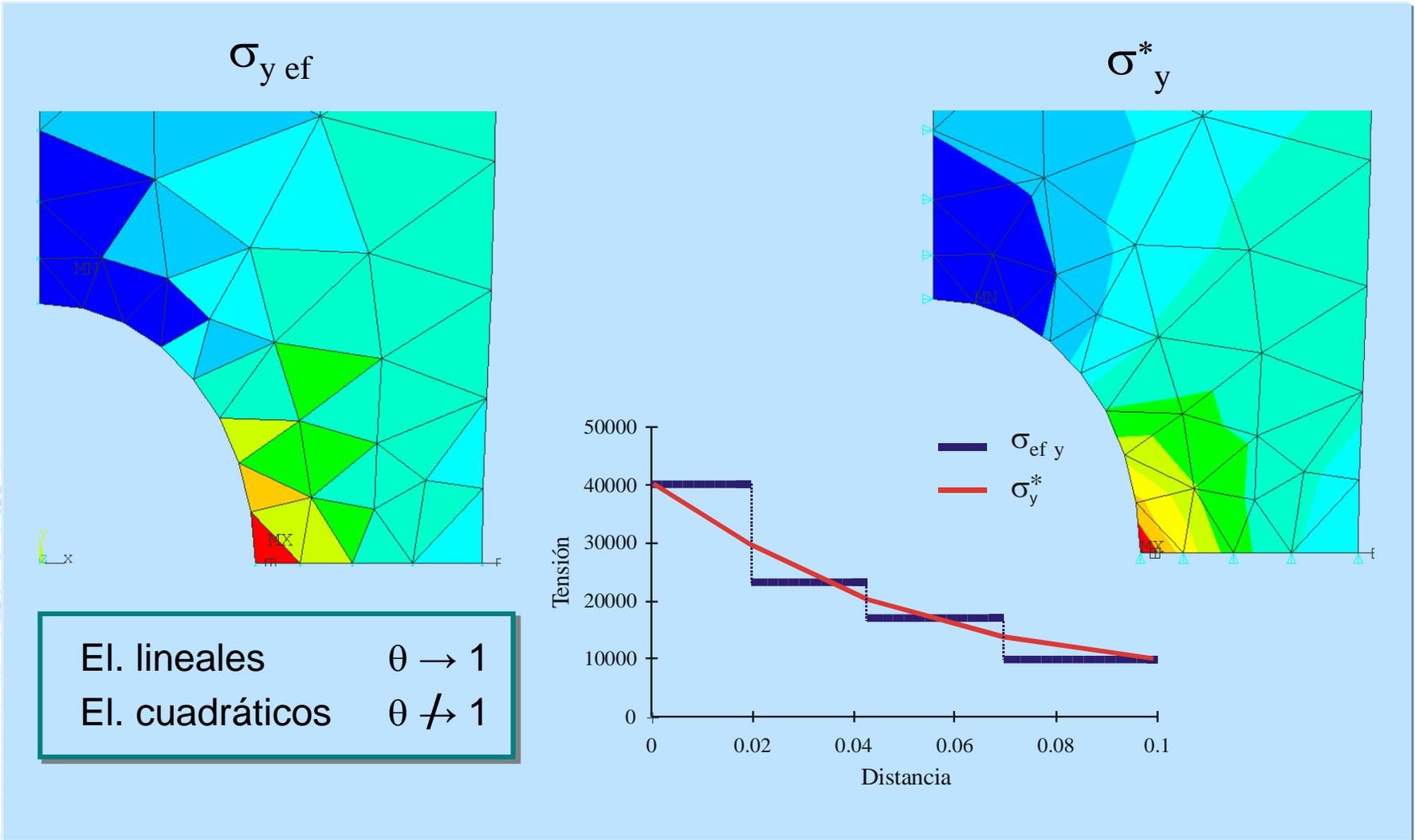
$$\underline{\sigma}^* = \mathbf{N} \underline{\underline{\sigma}}^*$$

- Técnicas de alisado: $\rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^*$
 - Promediado directo en nodos
 - Técnica SPR



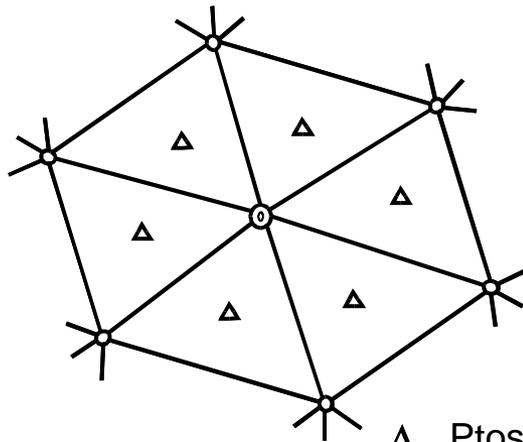
5.- Reconstrucción del campo de tensiones

5.1.- Promediado directo en nodos

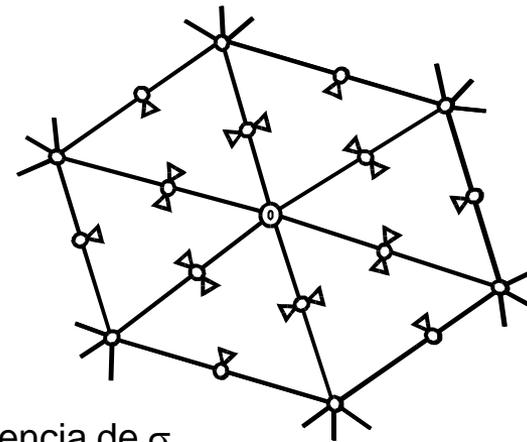


5.- Reconstrucción del campo de tensiones

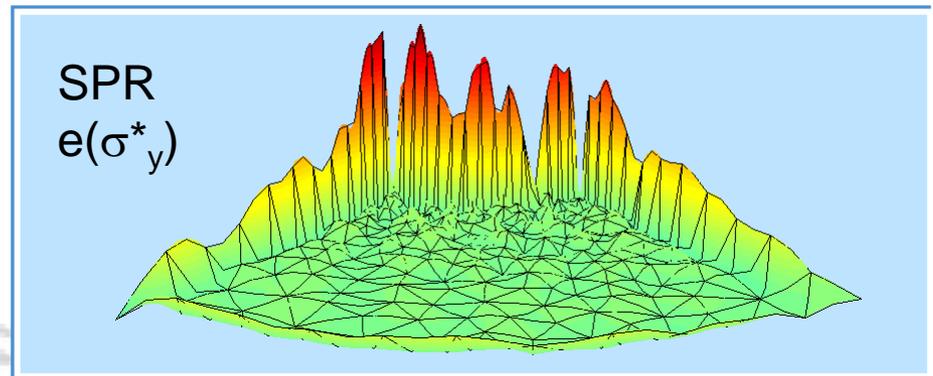
5.2.- Técnica SPR (Superconvergent Patch Recovery, Zienkiewicz y Zhu)



Δ Ptos superconvergencia de σ

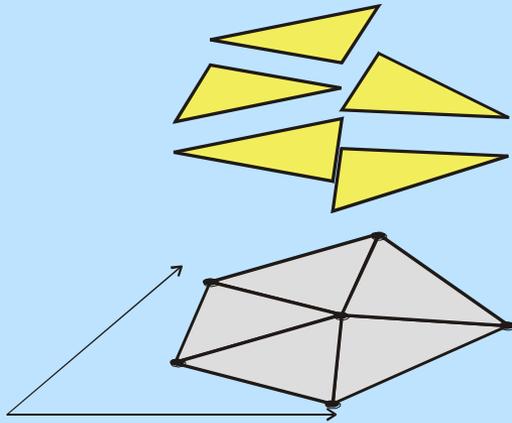


- Ajuste polinómico $\sigma^*_p = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}$
- Técnica Superconvergente
- Peor precisión en contorno



5.- Reconstrucción del campo de tensiones

5.2.- Técnica SPR (Superconvergent Patch Recovery, Zienkiewicz y Zhu)



ÍNDICE

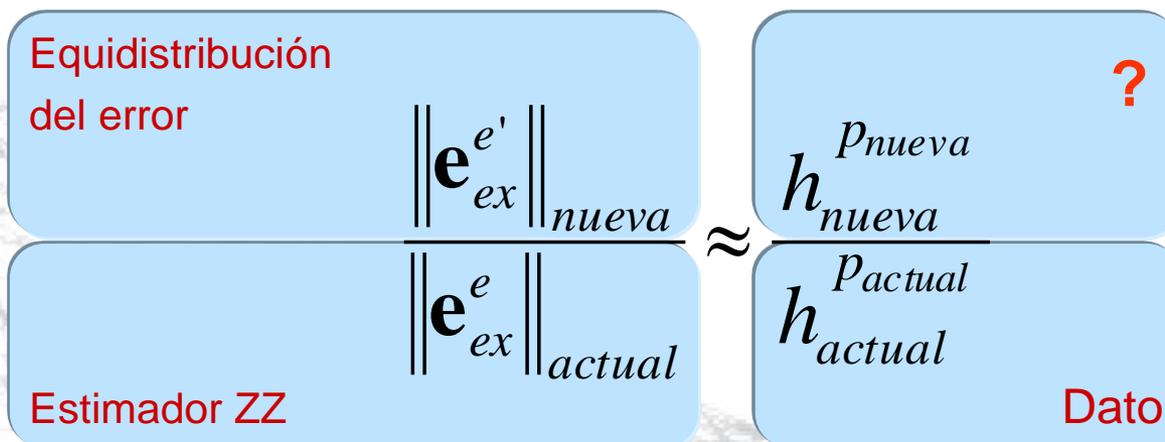
- 1.- Introducción
- 2.- Velocidad de convergencia del error de discretización
- 3.- Cuantificación del error de discretización
- 4.- Estimación del error de discretización
- 5.- Reconstrucción del campo de tensiones
- 6.- Técnicas adaptativas
 - 8.1.- Procedimientos h -adaptativos
 - 8.2.- Procedimientos p -adaptativos
 - 8.3.- Procedimientos hp -adaptativos

6.- Técnicas adaptativas

Procedimientos para disminuir el error adaptándose a la solución

Requieren:

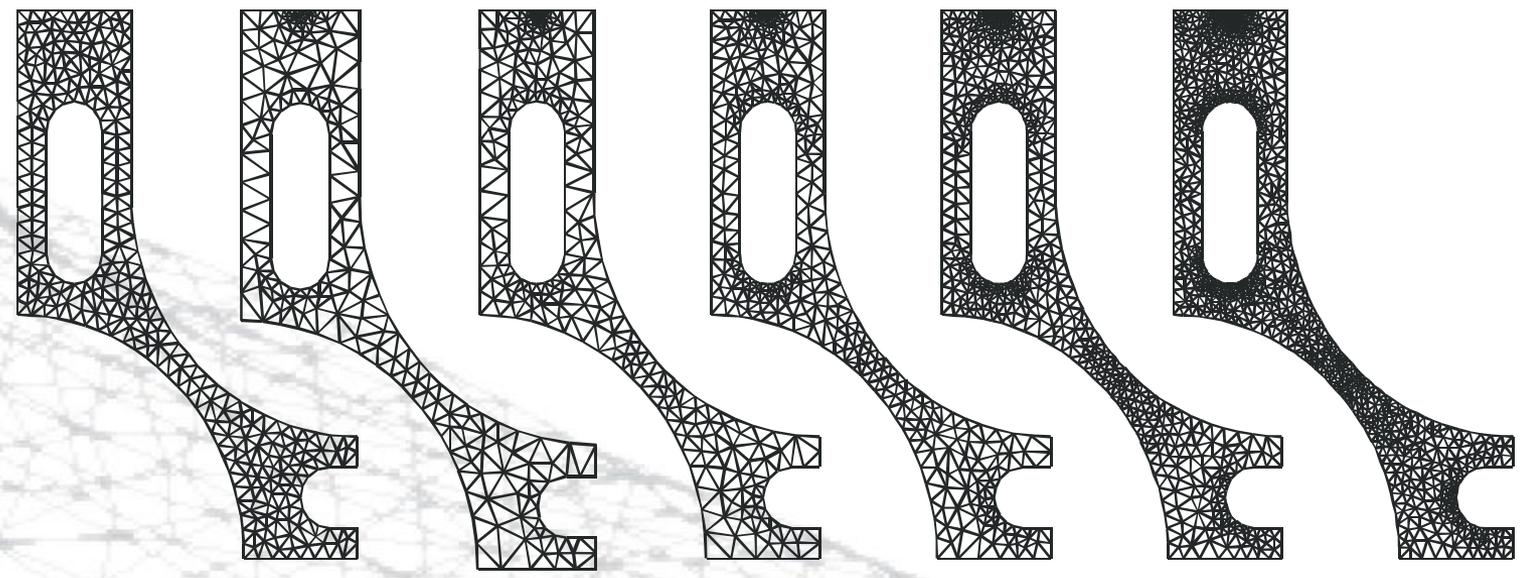
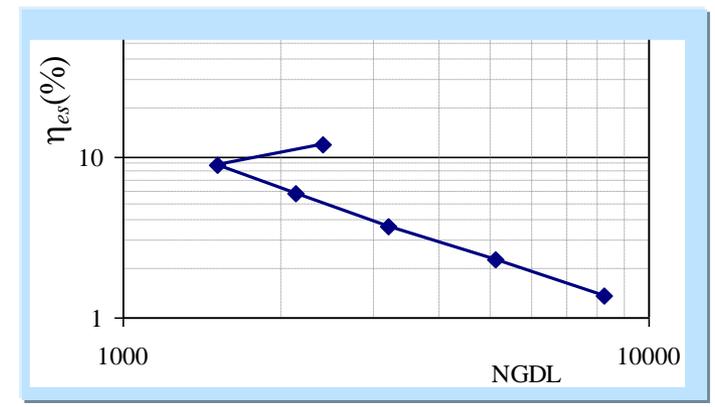
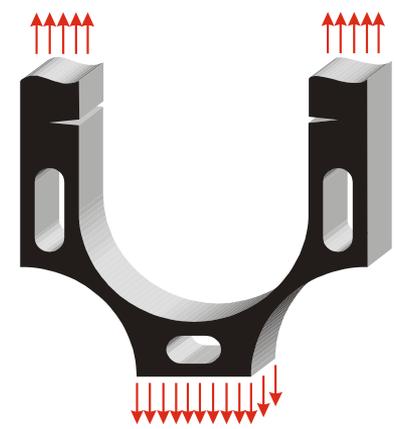
- Estimador del error de discretización a nivel de elemento \longrightarrow Estimador ZZ
- Criterio de distribución del error \longrightarrow Equidistribución del error (minimiza núm. de elementos)
- Ley de convergencia \longrightarrow $\|e_{ex}\| \approx C_0 h^p$



6.- Técnicas adaptativas

6.1. *h*-adaptatividad

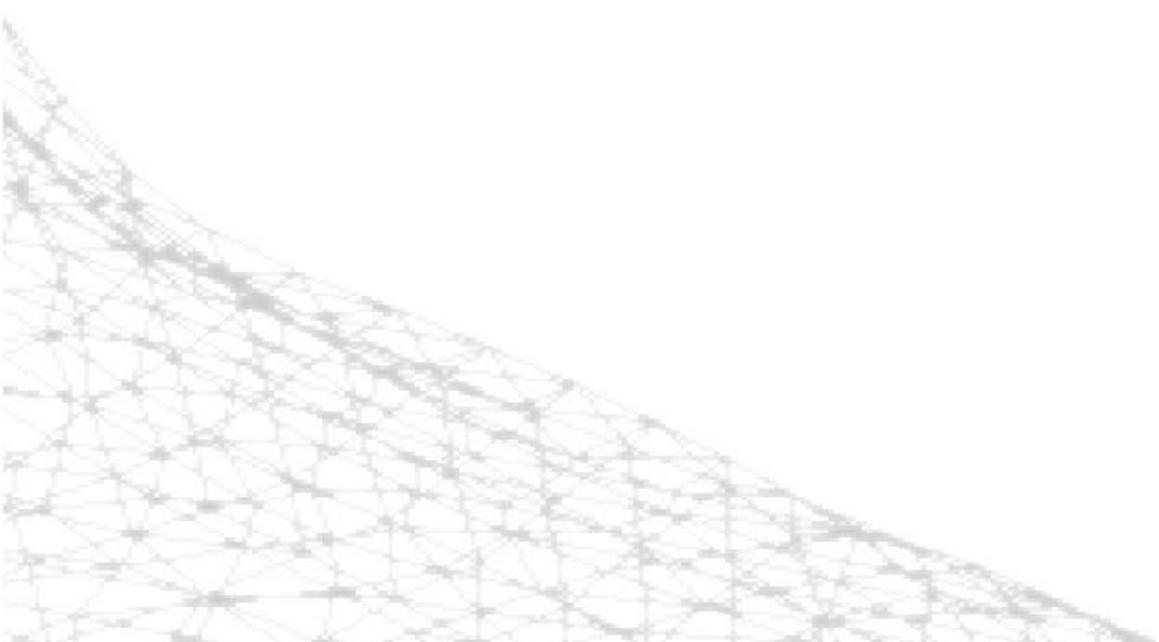
■ $\rho_{nueva} = \rho_{actual}$



6.- Técnicas adaptativas

6.2. p -adaptatividad

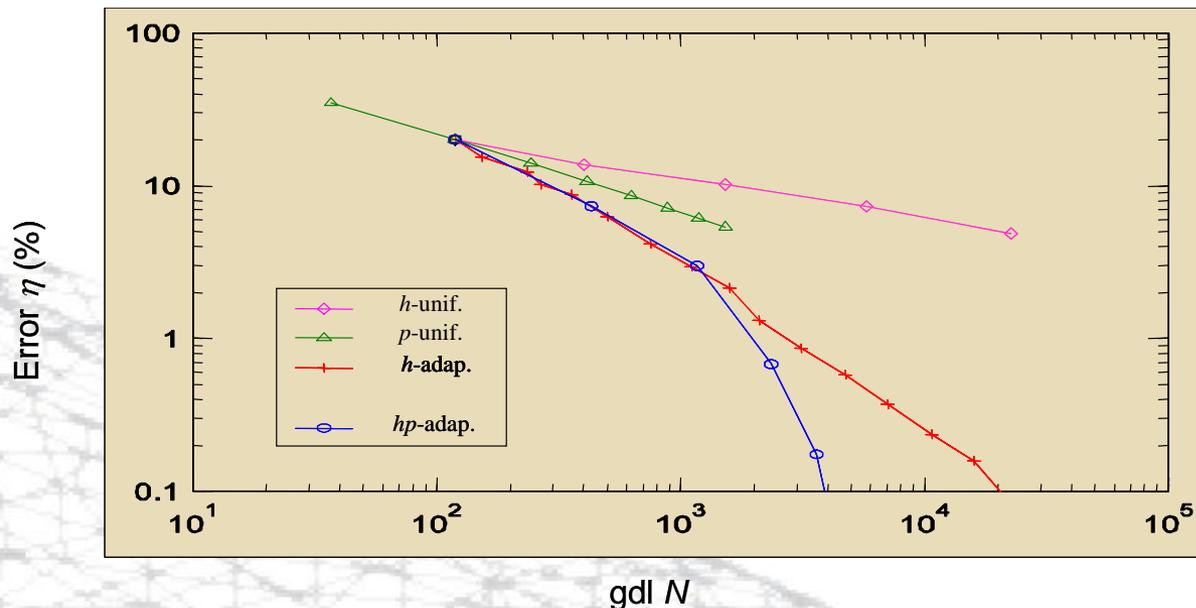
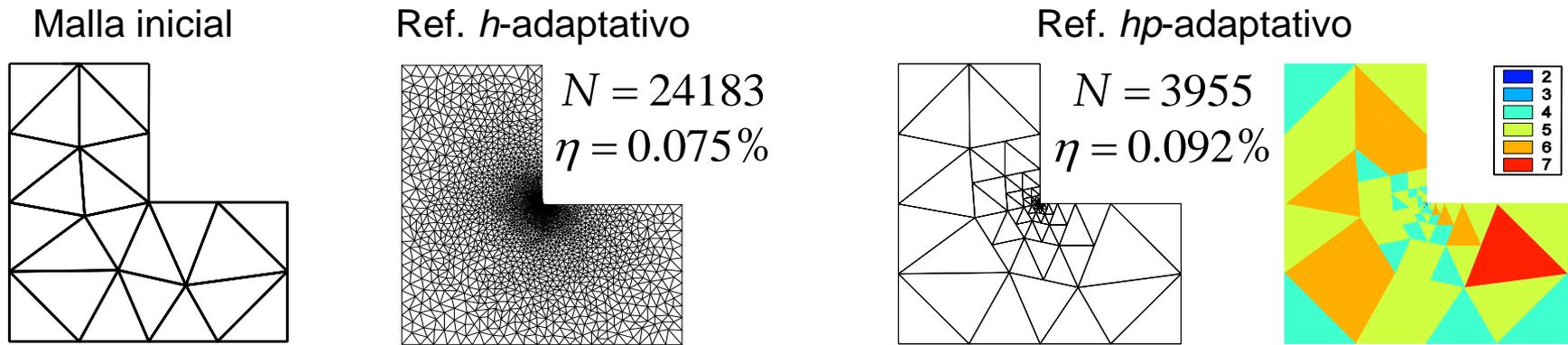
- $h_{nueva} = h_{actual}$
 - Variación de p
 - Funciones de forma **jerárquicas**
 - Estimación de error compleja



6.- Técnicas adaptativas

6.3. *hp*-adaptatividad

■ Variación de *h* y *p*



6.- Técnicas adaptativas

6.4. *r*-adaptatividad

- *Variación de coordenadas nodales*

